

Разной по ТЧ

1. Последовательность $a_1, a_2, a_3 \dots$, состоящая из натуральных чисел, задаётся правилом:

$$a_{n+1} = a_n + 2t(a_n)$$

для каждого натурального числа n , где $t(n)$ — число различных делителей числа n (включая 1 и n). Может ли случиться, что два соседних члена последовательности являются квадратами натуральных чисел?

2. Найдите все натуральные числа n , для которых $3^{n+1} + 4^{n+1} + 5^{n+1}$ делится на $2^n + 3^n + 5^n$.
3. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, 17$, такая что

$$(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{17} - a_1) = 2^n.$$

Найдите наибольшее возможное значение положительного целого числа n .

4. Пусть $a_1, a_2, \dots$ — бесконечная последовательность натуральных чисел. Конечное множество $S = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ натуральных чисел называется квадратным, если число

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \dots + a_{n_k}$$

является полным квадратом. Возможно ли, чтобы для данной последовательности $a_1, a_2, \dots$ **(а)** не существовало квадратных множеств? **(б)** множество было квадратным тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\{1, 2, \dots, n\}$ для некоторого натурального числа n ?

5. Найдите все тройки натуральных чисел (p, a, m) такие, что $p \geq 5$ — простое число, $a \leq 5p^2$ и

$$(p-1)! + a = p^m.$$

6. Пусть $m > 1$ — натуральное число и $N = m^{2017} + 1$. На доске слева направо записаны следующие числа:

$$N, N - m, N - 2m, \dots, 2m + 1, m + 1, 1.$$

На каждом ходу мы стираем самое левое число, записанное на доске, и все его делители (если они есть). Этот процесс продолжается до тех пор, пока все числа не будут удалены. Какие числа будут удалены на последнем ходу?

7. Пусть m и n — взаимно простые целые числа, причём $m > 1, n > 1$. Докажите, что существуют положительные целые числа a, b, c такие, что $m^a = 1 + n^b c$, причём n и c взаимно просты.
8. Пусть $P(x)$ — непостоянный приведённый многочлен с целыми коэффициентами, и пусть $a_1, a_2, \dots$ — бесконечная последовательность положительных целых чисел. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, каждое из которых делит хотя бы один член последовательности $P(n)^{a_n} + 1$.