

Многочлены Чебышёва

Определим рекуррентно две последовательности многочленов. *Многочлены Чебышёва первого рода:*

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Многочлены Чебышёва второго рода:

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{n+1}(x) = 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x).$$

1. (а) Докажите, что $T_n(\cos \varphi) = \cos(n\varphi)$ и $U_{n-1}(\cos \varphi) = \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi}$.
(б) Докажите, что при нечётных n существует многочлен P_n такой, что $P_n(\sin \varphi) = \sin(n\varphi)$.
(в) Докажите, что при чётных n такого многочлена не существует.
2. Докажите, что
(а) $T_{n+1}(x) = xU_n(x) - U_{n-1}(x)$;
(б) $T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x))$;
(в) $2T_n(x/2)$ — приведённый многочлен с целыми коэффициентами при $n \geq 1$;
(г) $T_n(x) + \sqrt{x^2 - 1} U_{n-1}(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$;
(д) $T'_n(x) = nU_{n-1}(x)$.

3. Пусть приведённый многочлен $P(x)$ степени n таков, что

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Докажите, что $P(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$.

Подсказка: рассмотрите точки, в которых $|T_n(x)| = 1$.

4. Докажите, что существует многочлен $P(x)$ степени n такой, что для всех $a \neq 0$ выполнено равенство

$$a^n + \frac{1}{a^n} = P\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Что это за многочлен?

5. (а) Докажите, что $\cos 20^\circ$ — иррациональное число.
(б) Докажите, что если $\cos\left(\frac{p}{q}\right)^\circ = \frac{m}{n}$, где $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$, $(m, n) = 1$, то n является степенью двойки (возможно, нулевой).
(в) Докажите, что на самом деле $\frac{m}{n}$ может равняться только одному из чисел $0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$.
(г) Выведите отсюда, что при $n = 5$ и $n \geq 7$ не существует правильного n -угольника с вершинами в узлах целочисленной решётки.
Для $n = 3, 6$ утверждение тоже верно, но не следует из предыдущего пункта.