

Многочлены Чебышёва

Определим рекуррентно две последовательности многочленов. *Многочлены Чебышёва первого рода*:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Многочлены Чебышёва второго рода:

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{n+1}(x) = 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x).$$

1. (а) Докажите, что $T_n(\cos \varphi) = \cos(n\varphi)$ и $U_{n-1}(\cos \varphi) = \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi}$.
(б) При каких натуральных n существует многочлен P такой, что $P(\sin \varphi) = \sin(n\varphi)$?
2. (а) Докажите, что $T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x))$.
(б) Докажите, что $2T_n(x/2)$ — приведённый многочлен с целыми коэффициентами при $n \geq 1$.
(в) Докажите, что $T_n(x) + \sqrt{x^2 - 1} U_{n-1}(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$.
3. Пусть приведённый многочлен $P(x)$ степени n таков, что

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Докажите, что $P(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$.

Подсказка: рассмотрите точки, в которых $|T_n(x)| = 1$.

4. (а) Докажите, что существует многочлен $P(x)$ степени n такой, что для всех $a \neq 0$ выполнено равенство

$$a^n + \frac{1}{a^n} = P\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Что это за многочлен? (б) Докажите, что при $n \geq 2$ все коэффициенты $P(x)$ целые и каждый коэффициент, кроме старшего, имеет с n общий делитель, больший единицы.

5. (а) Докажите, что $\cos 20^\circ$ — иррациональное число.
(б) Докажите, что если $\cos\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n}$, где $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$, $(m, n) = 1$, то n является степенью двойки (возможно, нулевой).
(в) Докажите, что на самом деле $\frac{m}{n}$ может равняться только одному из чисел $0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$.
(г) Выведите отсюда, что при $n = 5$ и $n \geq 7$ не существует правильного n -угольника с вершинами в узлах целочисленной решётки.
Для $n = 3, 6$ утверждение тоже верно, но не следует из предыдущего пункта.

6. Найдите все многочлены $P(x)$, для которых при всех $x \in [-1, 1]$ выполнено

$$P(\sqrt{2}x) = P\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right).$$

7. Для различных $x_1, \dots, x_n \in [-1, 1]$ докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{j \neq i} |x_i - x_j|} \geq 2^{n-2}.$$

Когда достигается равенство?