

Красно-манежный разнобой

1. Лолек нарисовал треугольник, а Болек провёл шесть прямых, проходящих через середину одной из сторон этого треугольника перпендикулярно другой стороне. Докажите, что площадь шестиугольника, ограниченного прямыми Болека, в два раза меньше площади треугольника Лолека.
2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BB_1 и CC_1 , и отметили такие точки K и L на сторонах AB и AC соответственно, что $AC_1 = BK$ и $AB_1 = CL$. Докажите, что прямая AO (O — центр описанной окружности) делит KL пополам.
3. (а) Пусть X и Y — середины сторон AB и AC остроугольного треугольника ABC . Внешние биссектрисы углов B и C пересекают XY в точках P и Q соответственно. Рассмотрим также центр вписанной окружности I и его проекцию K на сторону BC . Докажите, что площадь четырёхугольника $PIQK$ равна половине площади треугольника ABC .
(б) Биссектриса AD остроугольного треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке E . Пусть P и Q — проекции D на AB и AC соответственно. Докажите, что площадь четырёхугольника $APEQ$ равна площади треугольника ABC .
(в) Точка M лежит на меньшей дуге BC окружности, описанной около квадрата $ABCD$. Отрезки AM и BD пересекаются в точке P , отрезки DM и AC пересекаются в точке Q . Докажите, что площади треугольников ABP и PQD равны.
4. Окружность ω построена как на диаметре на высоте CH прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB . Касательные из A и B к ω пересекаются в точке P . Докажите, что длина касательной из P к ω равна трети AB .
5. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC отмечены точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите неравенство

$$\sqrt{S_{AB_1C_1}} + \sqrt{S_{A_1BC_1}} + \sqrt{S_{A_1B_1C}} \leq \frac{3}{2} \sqrt{S_{ABC}}$$

6. На основании BC трапеции $ABCD$ отметили точку E . Где нужно отметить точку F на основании AD , чтобы прямые AE , DE , BF , CF ограничивали четырёхугольник наибольшей площади?