

## Красно-манежный разнбой

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели высоты  $BB_1$  и  $CC_1$ , и отметили такие точки  $K$  и  $L$  на сторонах  $AB$  и  $AC$  соответственно, что  $AC_1 = BK$  и  $AB_1 = CL$ . Докажите, что прямая  $AO$  ( $O$  — центр описанной окружности) делит  $KL$  пополам.
2. (а) Биссектриса  $AD$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекает его описанную окружность в точке  $E$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — проекции  $D$  на  $AB$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что площадь четырёхугольника  $APEQ$  равна площади треугольника  $ABC$ .  
(б) Точка  $M$  лежит на меньшей дуге  $BC$  окружности, описанной около квадрата  $ABCD$ . Отрезки  $AM$  и  $BD$  пересекаются в точке  $P$ , отрезки  $DM$  и  $AC$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что площади треугольников  $ABP$  и  $PQD$  равны.
3. Окружность  $\omega$  построена как на диаметре на высоте  $CH$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с гипотенузой  $AB$ . Касательные из  $A$  и  $B$  к  $\omega$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что длина касательной из  $P$  к  $\omega$  равна трети  $AB$ .
4. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  треугольника  $ABC$  отмечены точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  соответственно. Докажите неравенство

$$\sqrt{S_{AB_1C_1}} + \sqrt{S_{A_1BC_1}} + \sqrt{S_{A_1B_1C}} \leq \frac{3}{2} \sqrt{S_{ABC}}$$

5. На основании  $BC$  трапеции  $ABCD$  отметили точку  $E$ . Где нужно отметить точку  $F$  на основании  $AD$ , чтобы прямые  $AE$ ,  $DE$ ,  $BF$ ,  $CF$  ограничивали четырёхугольник наибольшей площади?
6. Пусть  $M$  — точка пересечения медиан остроугольного треугольника  $ABC$ . Точка  $D$  такова, что  $AD \parallel BC$  и  $CM \perp MD$ . Какое наименьшее значение может принимать произведение  $AB \cdot CD$ , если площадь четырёхугольника  $AMCD$  равна  $S$ ?
7. В выпуклом вписанном пятиугольнике  $ABCDE$  стороны  $AB$  и  $DE$  равны. Точки  $X$  и  $Y$  лежат на сторонах  $BC$  и  $CD$  соответственно так, что площадь четырёхугольника  $AXCY$  равна площади треугольника  $BCD$ .  $AD$  и  $AB$  пересекают  $XY$  в точках  $Z$  и  $W$  соответственно. Точки  $W$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  лежат на прямой именно в таком порядке. Докажите, что окружности  $(BWY)$  и  $(DXZ)$  пересекаются на  $EC$ .