

Теорема Кронекера

1. По окружности длины 1 прыгает кузнечик, за каждый прыжок перемещаясь на $\alpha \in \mathbb{R}$ против часовой стрелки.
(а) (*Теорема Кронекера о возвращении*) Докажите, что для любой окрестности стартовой точки кузнечик ещё раз побывает в этой окрестности.
(б) (*Теорема Кронекера о плотности*) Докажите, что при $\alpha \notin \mathbb{Q}$ траектория кузнечика всюду плотна на окружности, то есть что кузнечик посетит любую наперёд заданную дугу окружности.
2. Кузнечик прыгает по прямой и умеет делать два прыжка: с длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ в обе стороны. Докажите, что он сможет попасть в любой отрезок на прямой.
3. Докажите, что некоторая степень семёрки начинается с 2026.
4. На плоскости выбраны две целочисленные точки и через них проведены параллельные прямые. Докажите, что в полосе между ними (включая границу) содержится бесконечно много целочисленных точек.
5. Можно ли число 0.1 представить в виде произведения ста положительных конечных десятичных дробей, меньших единицы?
6. На прямой отмечены несколько отрезков с суммой длин меньше $1 + \sqrt{2}$, а вся остальная прямая — это лава. Точечный кузнечик умеет прыгать вдоль прямой или на 1 вправо, или на $\sqrt{2}$ влево. Докажите, что как бы ни прыгал кузнечик, он рано или поздно упадёт в лаву.
7. У Константина Новосёлова в гараже валялись два равных прозрачных бесконечных клетчатых листа графена. Он взял один из листов, повернул на (а) 30° ; (б) 15° и наложил поверх второго. Докажите, что найдутся два узла сеток на расстоянии меньше 1 нанометра.

Многомерная теорема Кронекера о возвращении. Предположим, что по n -мерному тору $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R} \pmod{1})^n$ скачет кузнечик с вектором прыжка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Тогда для любой окрестности изначальной своей стартовой точки кузнечик ещё раз побывает в этой окрестности.

8. Докажите многомерную теорему Кронекера о возвращении.
9. В ЦПМ-банке в ходу n валют, и для каждой пары $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ есть фиксированный *обменный курс* $\alpha_{i,j} \in (0, +\infty)$. За одну операцию разрешается обменять несколько (скажем, $m \in \mathbb{N}$) единиц валюты i на $[\alpha_{i,j} \cdot m + 0.5]$ единиц валюты j . Известно, что курсы валют удовлетворяют при всех $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ равенствам $\alpha_{i,j} \cdot \alpha_{j,k} = \alpha_{i,k}$. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может с помощью таких операций заработать сколь угодно большую сумму. Могут ли слова барона оказаться правдой?