

Многомерная теорема Кронекера

0. (*Напоминание*) По окружности длины 1 прыгает кузнечик, за каждый прыжок перемещаясь на $\alpha \in \mathbb{R}$ против часовой стрелки.
- (а) (*Теорема Кронекера о возвращении*) Докажите, что для любой окрестности стартовой точки кузнечик ещё раз побывает в этой окрестности.
- (б) (*Теорема Кронекера о плотности*) Докажите, что при $\alpha \notin \mathbb{Q}$ траектория кузнечика всюду плотна на окружности.
1. Можно ли число 0.1 представить в виде произведения ста положительных конечных десятичных дробей, меньших единицы?
2. На прямой отмечены несколько отрезков с суммой длин меньше $1 + \sqrt{2}$, а вся остальная прямая — это лава. Точечный кузнечик умеет прыгать вдоль прямой или на 1 вправо, или на $\sqrt{2}$ влево. Докажите, что как бы ни прыгал кузнечик, он рано или поздно упадёт в лаву.
3. У Константина Новосёлова в гараже валялись два равных прозрачных бесконечных клетчатых листа графена. Он взял один из листов, повернул на (а) 30° ; (б) 15° и наложил поверх второго. Докажите, что найдутся два узла сеток на расстоянии меньше 1 нанометра.

Многомерная теорема Кронекера о возвращении. Предположим, что по n -мерному тору $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R} \pmod{1})^n$ скачет кузнечик с вектором прыжка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Тогда для любой окрестности изначальной своей стартовой точки кузнечик ещё раз побывает в этой окрестности.

4. Докажите многомерную теорему Кронекера о возвращении.

Многомерная теорема Кронекера о плотности.

- (1) Предположим, что по n -мерному тору $\mathbb{T}^n$ ползёт улитка с вектором скорости $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Тогда если числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то траектория улитки всюду плотна на торе.
- (2) Предположим, что по n -мерному тору $\mathbb{T}^n$ скачет кузнечик с вектором прыжка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Тогда если числа $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то траектория кузнечика всюду плотна на торе.
5. Докажите многомерную теорему Кронекера о плотности
- (а) Выведите из $(n-1)$ -мерной теоремы для кузнечика n -мерную теорему для улитки.
- (б) Выведите из n -мерной теоремы для улитки n -мерную теорему для кузнечика.

6. В ЦПМ-банке в ходу n валют, и для каждой пары $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ есть фиксированный *обменный курс* $\alpha_{i,j} \in (0, +\infty)$. За одну операцию разрешается обменять все имеющиеся на счету (скажем, $m \in \mathbb{N}$) единицы валюты i на $\lceil \alpha_{i,j} \cdot m + 0.5 \rceil$ единиц валюты j . Известно, что курсы валют удовлетворяют при всех $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ равенствам $\alpha_{i,j} \cdot \alpha_{j,k} = \alpha_{i,k}$. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может с помощью таких операций заработать сколь угодно большую сумму. Могут ли слова барона оказаться правдой?
7. Кузнечик живет на плоскости и умеет прыгать на вектора $(-1, 0)$, $(0, -1)$ и $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Докажите, что он не сможет все время оставаться внутри многоугольника площади меньше, чем $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (многоугольник не обязан быть выпуклым).
8. (а) Дано иррациональное число α . Докажите, что на окружности длины 1 можно закрасить несколько дуг с суммой длин 0,499 в чёрный цвет так, чтобы расстояние (по окружности) между любыми двумя чёрными точками было отлично от α .
- (б) Числа $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ рационально независимы. Докажите, что на окружности длины 1 можно закрасить несколько дуг с суммой длин 0,499 в чёрный цвет так, чтобы расстояние (по окружности) между любыми двумя чёрными точками не было равно никакому α_i .