

Теорема о двойном покрытии циклами

В последнее время ИИ решил немало открытых математических проблем. В этом листике мы разберём доказательство одной из самых известных гипотез теории графов, сформулированной в 1970-х годах, которую chatGPT решил в июле 2026 года.

Теорема о двойном покрытии циклами. Для любого связного графа без мостов существует набор циклов, в котором каждое ребро графа встречается ровно два раза.

Мы разрешаем кратные рёбра и запрещаем петли. Два кратных ребра считаются циклом длины 2.

Что знали кожаные меншки люди

1. Рёбра связного графа G , степени всех вершин которого равны 3, раскрашены правильным образом в 3 цвета (то есть у рёбер одинакового цвета нет общих вершин). Докажите, что у G существует двойное покрытие циклами.
2. Докажите, что достаточно доказать утверждение теоремы для графов, степень каждой вершины которых равна 3.

Увы, не у всех таких графов можно правильно раскрасить рёбра в 3 цвета: контрпримером может служить граф Петерсена.

Далее мы будем без доказательства использовать следующий известный факт.

Теорема о 8-потоке (Kilpatrick, 1975; Jaeger, 1976). Рёбрам каждого связного графа без мостов можно приписать ненулевые элементы $\mathbb{Z}_2^3$ (то есть векторы длины 3 с координатами из $\mathbb{Z}_2$) так, чтобы в каждой вершине сумма приписанных векторов выходящих из неё рёбер была равна $\vec{0}$.

3. Выведите из теоремы о 8-потоке, что у любого связного графа без мостов существует четверное покрытие циклами.

Что придумал chatGPT

Везде далее мы будем считать, что у нас дан связный граф G без мостов, степень каждой вершины которого равна 3. По теореме о 8-потоке каждому ребру e графа G можно сопоставить элемент $f(e) \in \mathbb{Z}_2^3$ так, что у каждой вершины сумма сопоставленных элементов выходящих из неё рёбер будет равна $\vec{0}$. Зафиксируем это сопоставление.

Наша основная цель — сопоставить каждому ребру G два различных элемента $\mathbb{Z}_2^3$, которые мы дальше будем называть *цветами*, так, чтобы выполнялось

условие о покраске: у каждой вершины каждый цвет встречается 0 или 2 раза.

4. Докажите, что если выполнено условие о покраске, то у графа существует двойное покрытие циклами.

Для каждой вершины произвольно зафиксируем порядок трёх исходящих из неё рёбер. Пусть для вершины v — это рёбра a, b, c . Припишем вершине v цвет t_v (какой именно, решим позднее) и сделаем такую раскраску:

$$a \leftrightarrow \{t_v + f(b), t_v + f(c)\}, \quad b \leftrightarrow \{t_v + f(a), t_v + f(c)\}, \quad c \leftrightarrow \{t_v + f(a), t_v + f(b)\}.$$

Несложно видеть, что для любой вершины v исходящие из неё рёбра раскрашены нужным нам образом. Однако у каждого ребра два конца, и нам надо согласовать раскраски для разных вершин. Чтобы это сделать, у нас есть свобода: мы можем менять цвет t_v у каждой вершины.

Дальше нам будет удобнее записать раскраску в другом виде. Для этого введём обозначения

$$g_{v,a} = f(b), \quad g_{v,b} = f(c), \quad g_{v,c} = f(a).$$

5. Проверьте, что ребру e , выходящему из вершины v , сопоставлены цвета

$$\{t_v + g_{v,e}, \quad t_v + g_{v,e} + f(e)\}.$$

6. (а) Докажите, что раскраски ребра e , соединяющего вершины u и v , совпадают тогда и только тогда, когда для какого-нибудь $\varepsilon_e \in \{0, 1\}$ выполнено равенство

$$t_u + t_v + \varepsilon_e f(e) = g_{u,e} + g_{v,e}. \quad (1)$$

(б) Что в полученном равенстве является известным, а что неизвестным? Если записать всевозможные равенства и посмотреть на них как на уравнения с переменными в $\mathbb{Z}_2$, то чего больше: уравнений или неизвестных?

Наша задача — показать, что полученная система уравнений имеет решение. Воспользуемся таким условием: система линейных уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда всякая линейная комбинация уравнений, зануляющая левую часть, зануляет и правую часть. Зафиксируем какую-нибудь линейную комбинацию.

Каждое уравнение (1) представляет собой равенство трёхмерных векторов, то есть три уравнения над $\mathbb{Z}_2$. Выбрать некоторые из них и сложить — это то же самое, что скалярно умножить обе части на некоторый вектор S_e .

Таким образом, для каждого ребра e есть свой вектор S_e , и нам нужно доказать, что если зануляется сумма

$$\sum_{e=uv} S_e \cdot (t_u + t_v + \varepsilon_e f(e)) = 0, \quad (2)$$

то зануляется и сумма

$$\sum_{e=uv} S_e \cdot (g_{u,e} + g_{v,e}) = 0. \quad (3)$$

7. (а) Пусть выполнено равенство (2). Рассмотрим вершину v и исходящие из неё рёбра a, b, c . Докажите, что найдётся такое $\lambda \in \{0, 1\}$, что из девяти скалярных произведений S_a, S_b, S_c на $f(a), f(b), f(c)$ следующие три значения равны нулю:

$$S_a \cdot f(a) = S_b \cdot f(b) = S_c \cdot f(c) = 0,$$

а остальные равны λ .

(б) Докажите, что чётность λ совпадает с чётностью числа ненулевых векторов среди S_a, S_b, S_c .

(в) Докажите, что выполнено равенство (3) ~~и тем самым не срамите кожаных меншков.~~