

## Теорема о двойном покрытии циклами

В последнее время с помощью искусственного интеллекта было решено немало открытых математических проблем. В этой статье мы разберём доказательство одной из самых известных гипотез теории графов, сформулированной в 1970-х годах. В июле 2026 года компания OpenAI опубликовала её доказательство, полученное с помощью модели GPT 5.6 Sol Ultra.

От доказательства, полученного компьютером, можно ожидать огромного перебора или длинной цепочки выкладок, которую трудно проверить человеку. Однако оригинальная работа [1] занимает всего три страницы, а доказательство основано на красивой идее.

**Теорема о двойном покрытии циклами.** Для любого связного графа без мостов существует набор циклов, в котором каждое ребро графа встречается ровно два раза.

Напомним, что *мостом* называется ребро связного графа, после удаления которого граф перестаёт быть связным. Условие на отсутствие мостов необходимо: мост не принадлежит ни одному циклу, поэтому его нельзя покрыть даже один раз. В наборе разрешается использовать один цикл несколько раз. Например, если граф — это просто цикл, то нужное покрытие — это две его копии.

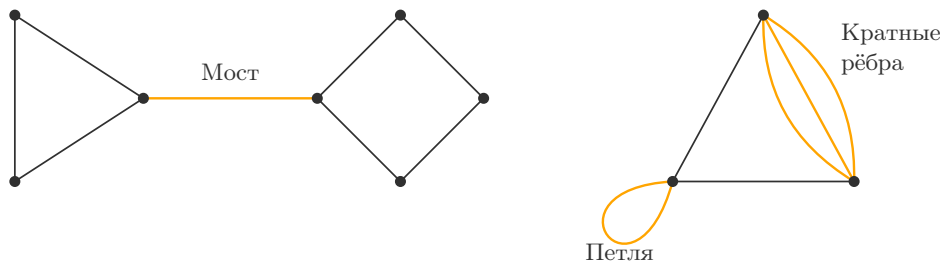


Рис. 1: Мост, кратные рёбра, петля

Мы разрешаем кратные рёбра (то есть две вершины могут соединять несколько рёбер) и запрещаем петли (то есть рёбра, у которых концы совпадают). Два кратных ребра будем считать циклом длины 2.

Сначала мы обсудим то, что человечество и так знало, а потом разберём само доказательство.

## Сведение к 3-регулярным графам

Граф называется *3-регулярным*, если степень каждой его вершины равна 3. Оказывается, теорему достаточно доказать для таких графов.

**Утверждение.** Если у любого связного 3-регулярного графа без мостов существует двойное покрытие циклами, то оно существует у любого связного графа без мостов.

**Доказательство.** Пусть дан связный граф  $G$  без мостов. В нём нет вершин степени 1, иначе выходящее из такой вершины ребро было бы мостом. Преобразуем  $G$  в 3-регулярный граф. Для этого заменим каждую вершину степени  $d$  на цикл длины  $d$ , назовём такой цикл *маленьким*. Каждое ребро, которое выходило из этой вершины, присоединим к своей вершине маленького цикла. Полученный граф  $H$  связан, из каждой его вершины выходит ровно три ребра: одно исходное ребро и два новых.

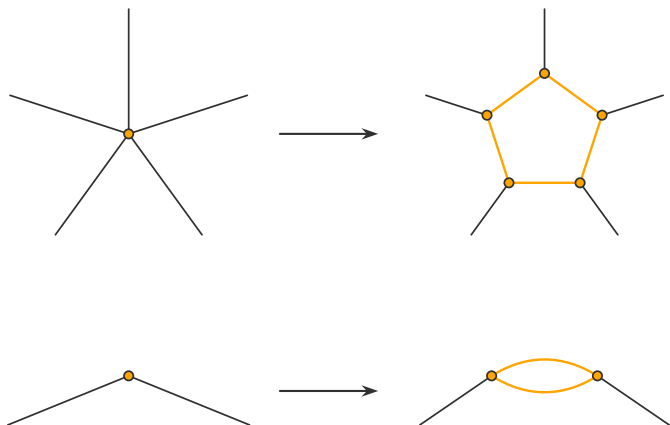


Рис. 2: Замена вершины циклом

Проверим, что в  $H$  нет мостов. Для этого достаточно показать, что каждое его ребро принадлежит какому-нибудь циклу. Все новые рёбра принадлежат маленьким циклам. Исходное ребро не было мостом, поэтому принадлежало некоторому циклу графа  $G$ . По этому циклу можно построить цикл в графе  $H$ : каждой вершине этого цикла будет соответствовать путь по маленькому циклу (см. пример на рисунке 3).

Поскольку  $H$  — связный 3-регулярный граф без мостов, то по условию у него есть двойное покрытие циклами. Заменим обратно каждый маленький цикл на вершину. Если цикл покрытия  $H$  совпадал с маленьким циклом, то он исчезнет. Любой другой цикл покрытия  $H$  превратится в цикл (возможно, с повторяющимися вершинами). Значит, каждое исходное ребро по-прежнему будет входить ровно в два цикла, то есть эти циклы образуют двойное покрытие графа  $G$ .  $\square$

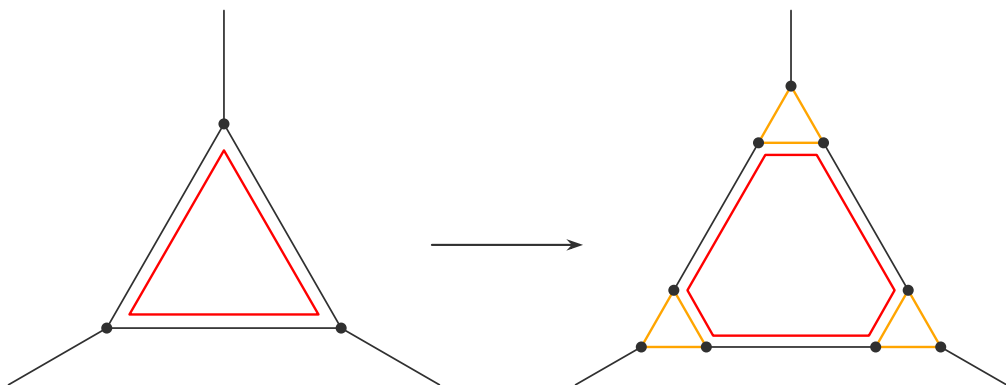


Рис. 3: Построение цикла в графе  $H$  по циклу в графе  $G$

Далее мы будем рассматривать связный 3-регулярный граф  $G$  без мостов. Для некоторых таких графов покрытие строится очень просто: например, если рёбра  $G$  можно правильно раскрасить в три цвета, то есть так, чтобы у рёбер с общей вершиной были разные цвета. Действительно, оставим рёбра двух цветов. В полученном подграфе степень каждой вершины будет равна 2, поэтому он разбивается на циклы. Прделав это для каждой из трёх пар цветов, получим набор циклов. Каждое ребро попадёт ровно в два цикла, поэтому построенный набор циклов — искомый.

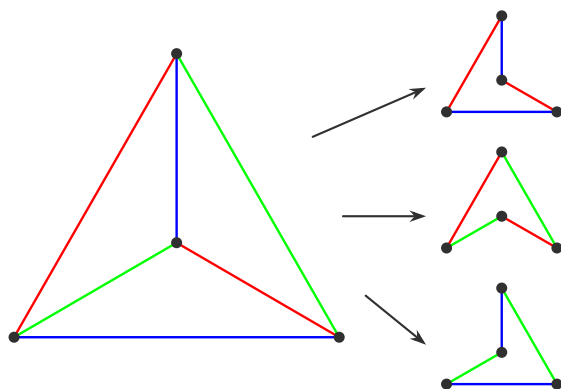


Рис. 4: Двойное покрытие графа с правильной раскраской

Увы, не у каждого 3-регулярного графа без мостов существует правильная раскраска рёбер в три цвета. Примером служит граф Петерсена, изображённый на рисунке 5.

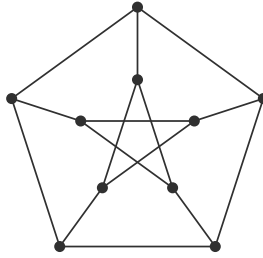


Рис. 5: Граф Петерсена

**Упражнение 1.** Докажите, что рёбра графа Петерсена нельзя правильно раскрасить в три цвета.

**Упражнение 2.** Тем не менее у графа Петерсена существует двойное покрытие циклами. Постройте его.

## Потоки

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, сформулируем ещё одно известное утверждение. Мы будем работать с векторами из  $\mathbb{Z}_2^3$ , то есть с трёхмерными векторами, координаты которых — остатки при делении на 2. Два таких вектора складываются покомпонентно, например

$$(1, 1, 0) + (1, 0, 0) = (0, 1, 0).$$

Назовём  $\mathbb{Z}_2^3$ -*потоком* сопоставление рёбрам векторов из  $\mathbb{Z}_2^3$  такое, что у каждой вершины сумма векторов, сопоставленных выходящим из неё рёбрам, равна нулевому вектору. Поток назовём *ненулевым*, если все сопоставленные векторы ненулевые. Пример потока приведён на рисунке.

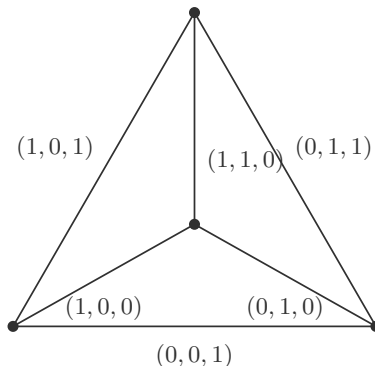


Рис. 6: Пример потока

**Упражнение 3.** Аналогично можно определить  $\mathbb{Z}_2^2$ -поток — каждому ребру сопоставляется двумерный вектор. Докажите, что существование ненулевого  $\mathbb{Z}_2^2$ -потока у 3-регулярного графа эквивалентно тому, что рёбра графа можно правильно раскрасить в 3 цвета.

**Замечание.** Потоки обычно определяют для ориентированных графов. Вместо условия о нулевой сумме используется условие, что сумма векторов для входящих рёбер равна сумме векторов для исходящих рёбер: сколько «затекло», столько и «вытекло», отсюда и название — поток. Но так как в нашем случае координаты векторов — это остатки по модулю 2, то сумма векторов совпадает с разностью, поэтому определение переносится и на неориентированные графы.

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема, которую мы будем использовать без доказательства.

**Теорема о  $\mathbb{Z}_2^3$ -потоке** (Kilpatrick, 1975; Jaeger, 1976). У связного графа без мостов существует ненулевой  $\mathbb{Z}_2^3$ -поток.

**Упражнение 4.** Докажите, что условие на отсутствие мостов существенное: если в графе есть мост, то у графа не существует ненулевого  $\mathbb{Z}_2^3$ -потока.

**Упражнение 5.** Выведите из теоремы о  $\mathbb{Z}_2^3$ -потоке, что у любого связного графа без мостов существует покрытие циклами в четыре слоя.

## Сведение к системе уравнений

Теперь перейдём непосредственно к работе OpenAI. Будем каждому ребру  $G$  сопоставлять два различных цвета. Мы хотим сделать это так, чтобы выполнялось *условие раскраски*: у любой вершины каждый цвет встречается 0 или 2 раза. В этом случае теорема будет доказана. Действительно, если оставить только рёбра одного цвета, то в полученном подграфе степень каждой вершины будет равна 0 или 2, поэтому рёбра разбиваются на циклы. Объединение этих циклов для разных цветов и даёт нужное покрытие: поскольку каждому ребру сопоставлено два различных цвета, то оно окажется покрыто двумя циклами.

Воспользуемся тем, что у нашего графа есть ненулевой  $\mathbb{Z}_2^3$ -поток; обозначим его через  $f$ . Свяжем с ним цвета: в качестве цветов будем использовать элементы  $\mathbb{Z}_2^3$ , включая нулевой вектор.

Выберем вершину  $v$  с исходящими из неё рёбрами  $a, b, c$ . Значения потока  $f(a), f(b), f(c)$  попарно различны: из определения потока  $f(a) + f(b) + f(c) = 0$  (здесь и везде далее под сложением понимается сложение по модулю 2), поэтому если, например,  $f(a) = f(b)$ , то  $f(c) = 0$ , что противоречит тому, что поток ненулевой. Тогда в качестве цветов рёбер  $a, b, c$  можно использовать  $f(a), f(b)$ ,

$f(c)$ . Сопоставим каждому ребру значения потока на двух оставшихся рёбрах:

$$a \leftrightarrow \{f(b), f(c)\}, \quad b \leftrightarrow \{f(a), f(c)\}, \quad c \leftrightarrow \{f(a), f(b)\}.$$

Каждый из цветов встречается дважды, поэтому у вершины  $v$  условие раскраски выполнено. Но у каждого ребра два конца, и цвета, которые мы будем сопоставлять ребру с разных концов, могут не совпасть. Давайте модифицируем раскраску: для каждой вершины  $v$  заведём свой цвет  $t_v$ , который будем прибавлять ко всем цветам у этой вершины. То есть сделаем такую раскраску:

$$a \leftrightarrow \{t_v + f(b), t_v + f(c)\}, \quad b \leftrightarrow \{t_v + f(a), t_v + f(c)\}, \quad c \leftrightarrow \{t_v + f(a), t_v + f(b)\}.$$

Цвета по-прежнему попарно различны, каждый цвет встречается дважды. А чтобы согласовать раскраски с разных концов ребра, у нас появилась свобода: можно менять цвет  $t_v$  каждой вершины.

Найдём условие, при котором раскраски ребра совпадают. Для каждой пары из вершины  $v$  и исходящего из неё ребра  $e$  обозначим потоки двух оставшихся рёбер через  $\alpha_{v,e}$  и  $\beta_{v,e}$  (в произвольном, но фиксированном порядке). Поскольку сумма векторов потока у каждой вершины равна 0, то  $\alpha_{v,e} + \beta_{v,e} = f(e)$ .

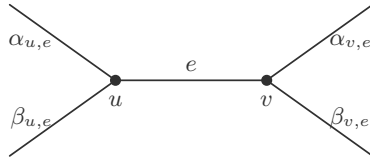


Рис. 7: Обозначения возле ребра  $e$

Рассмотрим ребро  $e$ , соединяющее вершины  $u$  и  $v$ . Раскраски  $e$  совпадают тогда и только тогда, когда равны два множества:

$$\{t_v + \alpha_{v,e}, t_v + \beta_{v,e}\} = \{t_u + \alpha_{u,e}, t_u + \beta_{u,e}\}.$$

Сумма элементов каждого множества равна  $f(e)$ . Поэтому если один цвет первого множества равен какому-то цвету второго множества, то равны и оставшиеся два цвета. Получаем два варианта.

1. Равны цвета  $t_v + \alpha_{v,e}$  и  $t_u + \alpha_{u,e}$ . Тогда

$$t_v + \alpha_{v,e} = t_u + \alpha_{u,e} \Leftrightarrow t_v + t_u = \alpha_{v,e} + \alpha_{u,e}.$$

2. Равны цвета  $t_v + \alpha_{v,e}$  и  $t_u + \beta_{u,e}$ . Тогда

$$t_v + \alpha_{v,e} = t_u + \beta_{u,e} \Leftrightarrow t_v + t_u = \alpha_{v,e} + \beta_{u,e} \Leftrightarrow t_v + t_u + f(e) = \alpha_{v,e} + \alpha_{u,e}.$$

Оба случая можно записать одним равенством: раскраски ребра  $e$  совпадают тогда и только тогда, когда найдётся такое  $\varepsilon_e \in \{0, 1\}$ , что

$$t_v + t_u + \varepsilon_e f(e) = \alpha_{v,e} + \alpha_{u,e}. \quad (1)$$

Записав равенство (1) для каждого ребра, получим систему уравнений. Если мы докажем, что у неё есть решение, то теорема будет доказана.

Прежде чем двигаться дальше, немного проанализируем систему. В ней значения  $f(e)$ ,  $\alpha_{v,e}$  известны, а подобрать нужно цвета  $t_v$  для всех вершин и числа  $\varepsilon_e$  для всех рёбер. Пусть в графе  $n$  вершин. Сложив все степени вершин и поделив пополам, получим, что в графе  $3n/2$  рёбер. Каждое векторное равенство (1) даёт три линейных уравнения: по одному для каждой координаты. Значит, всего уравнений  $3n/2 \cdot 3 = 9n/2$ . Количество векторов  $t_v$  равно количеству вершин, а переменных  $\varepsilon_e$  — количеству рёбер. Поэтому переменных всего  $3n + 3n/2 = 9n/2$ . Таким образом, у нашей системы линейных уравнений переменных столько же, сколько уравнений.

Если вы знакомы с основами линейной алгебры, то знаете, что в таких случаях можно надеяться, что система имеет единственное решение для любой правой части. Однако здесь это не так: если взять решение и прибавить один и тот же ненулевой вектор ко всем  $t_v$ , то левая часть каждого уравнения (1) не изменится, поэтому получится новое решение.

## Почему система имеет решение

Чтобы проверить наличие решений, мы воспользуемся следующим стандартным фактом про системы линейных уравнений:

**Утверждение.** Система линейных уравнений над  $\mathbb{Z}_2$  имеет решение тогда и только тогда, когда для любого набора её уравнений выполнено следующее условие: если в сумме левых частей все неизвестные сокращаются, то сумма правых частей равна нулю.

**Упражнение 6.** Докажите это утверждение.

Каждое равенство (1) представляет собой три уравнения. Как алгебраически записать, что мы выбираем часть из них и складываем? В этом нам поможет скалярное произведение. Пусть, например, мы хотим выбрать первую и третью координаты вектора  $(x_1, x_2, x_3)$  и сложить. Для этого можно скалярно умножить его на вектор  $(1, 0, 1)$ :

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 0, 1) = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1 = x_1 + x_3.$$

А если нам не нужно ни одно из уравнений, то нужно скалярно умножить на нулевой вектор. Таким образом, сложить часть уравнений — это то же самое, что для каждого ребра выбрать свой вектор  $S_e$  (назовём его *вектором выбора* ребра  $e$ ), скалярно умножить на него соответствующее равенство (1) и результаты сложить:

$$\sum_{e=uv} S_e \cdot (t_u + t_v + \varepsilon_e f(e)) = \sum_{e=uv} S_e \cdot (\alpha_{v,e} + \alpha_{u,e}). \quad (2)$$

Поймём, когда левая часть зануляется. Переменная  $\varepsilon_e$  присутствует только в одном слагаемом, поэтому коэффициент перед ней равен  $S_e \cdot f(e)$ . Вектор переменных  $t_v$  входит в три уравнения вида (1), каждое из которых соответствует одному из рёбер, выходящих из вершины  $v$ . Следовательно, слагаемые с  $t_v$  объединяются в  $(S_a + S_b + S_c) \cdot t_v$ . Таким образом, в левой части все переменные сокращаются тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} S_e \cdot f(e) &= 0 \quad \text{для каждого ребра } e, \\ S_a + S_b + S_c &= 0 \quad \text{для каждой вершины } v \text{ с рёбрами } a, b, c. \end{aligned} \quad (3)$$

Докажем, что при этих условиях правая часть тоже будет равна 0. Для этого сгруппируем слагаемые по вершинам. Каждая вершина  $v$  с рёбрами  $a, b, c$  участвует в трёх слагаемых:  $S_a \cdot \alpha_{v,a} + S_b \cdot \alpha_{v,b} + S_c \cdot \alpha_{v,c}$ . Чтобы вычислить значение этого выражения, поймём, чему равны попарные скалярные произведения векторов  $S_a, S_b, S_c$  с векторами  $f(a), f(b), f(c)$ .

Из (3) следует, что

$$S_a \cdot f(a) = S_b \cdot f(b) = S_c \cdot f(c) = 0.$$

Поскольку  $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ , то

$$0 = S_a \cdot (f(a) + f(b) + f(c)) = S_a \cdot f(b) + S_a \cdot f(c) \Leftrightarrow S_a \cdot f(b) = S_a \cdot f(c).$$

Поскольку  $S_a + S_b + S_c = 0$ , то

$$0 = (S_a + S_b + S_c) \cdot f(a) = S_b \cdot f(a) + S_c \cdot f(a) \Leftrightarrow S_b \cdot f(a) = S_c \cdot f(a).$$

Записав аналогичные равенства, получим, что шесть оставшихся скалярных произведений равны. Таким образом, для некоторого  $\lambda_v \in \{0, 1\}$  таблица значений скалярных произведений выглядит так:

| $\cdot$ | $f(a)$      | $f(b)$      | $f(c)$      |
|---------|-------------|-------------|-------------|
| $S_a$   | 0           | $\lambda_v$ | $\lambda_v$ |
| $S_b$   | $\lambda_v$ | 0           | $\lambda_v$ |
| $S_c$   | $\lambda_v$ | $\lambda_v$ | 0           |

Докажем, что  $\lambda_v$  имеет ту же чётность, что и количество ненулевых векторов среди  $S_a, S_b, S_c$ . Если  $\lambda_v = 1$ , то все три вектора выбора ненулевые, поскольку для каждого из них скалярное произведение с каким-то другим вектором отлично от 0.

Пусть  $\lambda_v = 0$ . Поймём, у скольких векторов нулевое скалярное произведение с  $f(a)$  и  $f(b)$ . Чтобы найти все такие векторы  $(x, y, z)$ , обозначим координаты векторов  $f(a)$  и  $f(b)$ :

$$f(a) = (a_1, a_2, a_3), \quad f(b) = (b_1, b_2, b_3).$$

Тогда, записав скалярные произведения, получим систему из двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0. \end{cases}$$

**Упражнение 7.** Используя, что  $f(a)$  и  $f(b)$  — различные ненулевые векторы, докажите, что эта система имеет ровно два решения, одно из которых — нулевое.

Получается, что каждый из векторов  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  равен одному из двух векторов, которые являются решениями этой системы. Поскольку их сумма равна 0, то либо они все нулевые, либо один из них нулевой, а два других — равные ненулевые. В любом случае ненулевых векторов чётное количество, что мы и хотели.

Вернёмся к правой части равенства (2) и докажем, что она равна 0. Поскольку  $\alpha_{v,e}$  — значение потока на одном из двух рёбер, отличных от  $e$ , то

$$S_a \cdot \alpha_{v,a} + S_b \cdot \alpha_{v,b} + S_c \cdot \alpha_{v,c} = 3\lambda_v = \lambda_v,$$

то есть вклад в сумму каждой вершины равен чётности числа ненулевых векторов выбора, сопоставленных выходящим из неё рёбрам. Иначе говоря,

$$\sum_{e=uv} S_e \cdot (\alpha_{v,e} + \alpha_{u,e}) = \sum_v \lambda_v.$$

Но сумма  $\lambda_v$  по всем вершинам чётная, поскольку любое ребро с ненулевым вектором выбора считается дважды: по одному разу для каждого конца ребра. Следовательно, сумма равна 0, что мы и хотели доказать.

Таким образом, система, составленная из уравнений (1), имеет решение, то есть выбором цветов вершин  $t_v$  раскраски рёбер можно согласовать. Значит, условие раскраски будет выполнено. Теорема доказана!

## Список литературы

- [1] OpenAI. *A proof of the cycle double cover conjecture*. 2026.  
[https://cdn.openai.com/pdf/04d1d1e4-bc75-476a-97cf-49055cd98d31/cdc\\_proof.pdf](https://cdn.openai.com/pdf/04d1d1e4-bc75-476a-97cf-49055cd98d31/cdc_proof.pdf).