

Очный тур

1. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непостоянная функция. Докажите, что существуют действительные числа x, y , для которых $f(x + y) < f(xy)$.
2. Дан выпуклый четырёхугольник. Петя отмечает внутри него точку и соединяет её с серединами сторон четырёхугольника. При этом четырёхугольник разбивается на четыре куска. Всегда ли Петя может выбрать точку так, чтобы эти четыре куска имели равные площади?
3. Дана клетчатая сетка 2025×2025 , все границы клеток покрашены в чёрный цвет. За один ход можно выбрать произвольный клетчатый прямоугольник и покрасить его границу в красный цвет (чёрные отрезки границы при этом перекрасятся в красный, а красные останутся красными). За какое наименьшее число ходов можно сделать всю сетку красной?
4. Найдите все пары натуральных чисел m и n , не равных одновременно единице, для которых $n^3 + 1$ делится на $mn - 1$.
5. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Прямая DE пересекает описанную окружность треугольника в точках P и Q , причём P лежит на меньшей дуге BC , а Q лежит на меньшей дуге AC . Наконец, AQ и BH пересекаются в точке S . Докажите, что описанные окружности треугольников BPE и QHS и прямая PH пересекаются в одной точке.