

Дистанционный отборочный тур, решения

- 1.1. В ряд выложены 10 монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Расположение монет назовём *удачным*, если оно совпадает не менее чем в 4 позициях с каждым расположением, в котором орлов и решек поровну. Сколько существует удачных расположений?

Ответ: 22.

Решение. Пусть в удачном расположении R ровно k орлов. Возьмём произвольное расположение X с пятью орлами и пятью решками и посчитаем число совпадений с нашим расположением R .

Пусть у X и R совпадают орлы ровно в t позициях. Тогда решки совпадают в $5 - (k - t)$ позициях (у R решек ровно $10 - k$, и X ставит решку в $10 - k - (5 - t)$ из них). Всего совпадений

$$t + (5 - (k - t)) = 5 - k + 2t.$$

Так как минимальное значение t равно $\max(0, k - 5)$, то минимальное число совпадений — это $5 - k + 2\max(0, k - 5)$. По условию

$$5 - k + 2\max(0, k - 5) \geq 4.$$

При $k \leq 5$ получаем $k \leq 1$, при $k \geq 5$ получаем $k \geq 9$.

Итак, подходят расположения с $k \in \{0, 1, 9, 10\}$, и их количество равно

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 22.$$

- 1.2. В ряд выложены 12 монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Расположение монет назовём *удачным*, если оно совпадает не менее чем в 5 позициях с каждым расположением, в котором орлов и решек поровну. Сколько существует удачных расположений?

Ответ: 26.

- 1.3. В ряд выложены 14 монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Расположение монет назовём *удачным*, если оно совпадает не менее чем в 6 позициях с каждым расположением, в котором орлов и решек поровну. Сколько существует удачных расположений?

Ответ: 30.

- 1.4. В ряд выложены 16 монет, каждая лежит орлом или решкой вверх. Расположение монет назовём *удачным*, если оно совпадает не менее чем в 7

позициях с каждым расположением, в котором орлов и решек поровну. Сколько существует удачных расположений?

Ответ: 34.

- 2.1.** Неотрицательные действительные числа a, b, c, d, e, f удовлетворяют условию $a + b + c + d + e + f = 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab?$$

Ответ: 8.

Решение. Раскроем произведение скобок, составленных из «противоположных» переменных:

$$(a + d)(b + e)(c + f) = abc + abf + aec + aef + dbc + dbf + dec + def.$$

Здесь присутствуют все шесть слагаемых нашего выражения: $abc, dbc = bcd, dec = cde, def, aef = efa, abf = fab$, и ещё два лишних: aec и dbf . Все переменные неотрицательны, поэтому

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab \leq (a + d)(b + e)(c + f).$$

Сумма трёх скобок равна $a + b + c + d + e + f = 6$, а по неравенству о средних произведение трёх неотрицательных чисел с фиксированной суммой 6 не превосходит $\left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$.

Осталось убедиться, что значение 8 достигается: при $a = b = c = 2$ и $d = e = f = 0$ исходное выражение равно $abc = 8$ (остальные слагаемые содержат множитель d, e или f и обращаются в нуль).

Итак, наибольшее значение равно 8.

- 2.2.** Неотрицательные действительные числа a, b, c, d, e, f удовлетворяют условию $a + b + c + d + e + f = 9$. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab?$$

Ответ: 27.

- 2.3.** Неотрицательные действительные числа a, b, c, d, e, f удовлетворяют условию $a + b + c + d + e + f = 12$. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab?$$

Ответ: 64.

- 2.4. Неотрицательные действительные числа a, b, c, d, e, f удовлетворяют условию $a + b + c + d + e + f = 15$. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab?$$

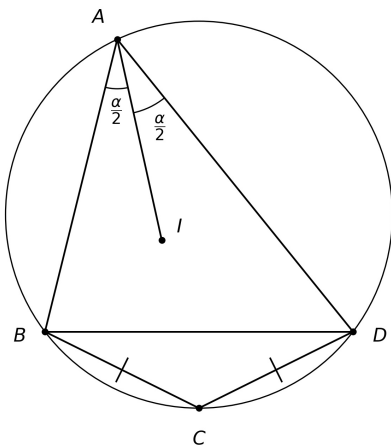
Ответ: 125.

- 3.1. В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $BC = CD = 2$. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABD . Найдите наименьшее возможное значение длины диагонали BD , если $AI = 6$.

В качестве ответа введите квадрат длины BD .

Ответ: 15.

Решение.



Так как $BC = CD$, то точка C — середина дуги BD , не содержащей A . Поэтому луч AC является биссектрисой угла BAD и проходит через точку I .

По лемме о трезубце $CI = CB = CD = 2$, следовательно

$$CA = CI + IA = 2 + 6 = 8.$$

Пусть R — радиус описанной окружности, $\angle BAD = \alpha$. Вписанный угол $\angle BAD$ опирается на хорду BD , а вписанный угол $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ — на хорду BC , поэтому

$$BD = 2R \sin \alpha, \quad BC = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Воспользовавшись формулой синуса двойного угла, получаем

$$BD = 2 BC \cos \frac{\alpha}{2} = 4 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Так как $2R \geq CA = 8$ и $\frac{\alpha}{2}$ — острый угол, то

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BC}{2R} \leq \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad \Rightarrow \quad \cos \frac{\alpha}{2} \geq \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Следовательно,

$$BD = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \geq 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}.$$

Равенство $BD = \sqrt{15}$ достигается: достаточно рассмотреть окружность с диаметром $AC = 8$ и хордами $BC = CD = 2$.

- 3.2.** В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $BC = CD = 3$. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABD . Найдите наименьшее возможное значение длины диагонали BD , если $AI = 6$.

В качестве ответа введите квадрат длины BD .

Ответ: 32.

- 3.3.** В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $BC = CD = 6$. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABD . Найдите наименьшее возможное значение длины диагонали BD , если $AI = 2$.

В качестве ответа введите квадрат длины BD .

Ответ: 63.

- 3.4.** В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $BC = CD = 6$. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABD . Найдите наименьшее возможное значение длины диагонали BD , если $AI = 3$.

В качестве ответа введите квадрат длины BD .

Ответ: 80.

- 4.1.** Сколько существует упорядоченных четвёрок (a, b, c, d) натуральных делителей числа 30, для которых $abcd > 900$?

Ответ: 1940.

Решение. У числа $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ровно восемь делителей, поэтому всего упорядоченных четвёрок $8^4 = 4096$.

Посчитаем количество четвёрок (a, b, c, d) , для которых $abcd = 900$. Каждому делителю 30 сопоставим вектор показателей простых 2, 3, 5 — это вектор из нулей и единиц. Условие $abcd = 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ означает, что

по каждой из трёх координат сумма четырёх показателей равна 2, то есть среди четырёх векторов ровно две единицы и два нуля в этой координате. Координаты независимы, и для каждой есть $C_4^2 = 6$ способов, поэтому четвёрок с произведением 900 ровно $6^3 = 216$.

Теперь ответим на вопрос задачи. Сопоставим каждому делителю x делитель $\frac{30}{x}$. Это взаимно однозначное соответствие на множестве делителей. Сопоставим четвёрке (a, b, c, d) четвёрку $(\frac{30}{a}, \frac{30}{b}, \frac{30}{c}, \frac{30}{d})$.

Заметим, что произведение всех восьми чисел в паре соответствующих четвёрок равно 900^2 . Из этого следует, что в некоторых парах произведение чисел в обеих четвёрках равно 900, а в остальных парах — в одной четвёрке произведение больше 900, а в другой — меньше 900. Значит, нам нужно посчитать количество четвёрок второго типа:

$$\frac{4096 - 216}{2} = 1940.$$

- 4.2.** Сколько существует упорядоченных четвёрок (a, b, c, d) натуральных делителей числа 210, для которых $abcd > 44100$?

Ответ: 32120.

- 5.1.** В шахматном турнире участвовали 300 человек. Некоторые пары участников сыграли между собой по одной партии, а остальные пары друг с другом не играли. В конце турнира оказалось, что если двое сыграли друг с другом, то они провели разное количество партий. Какое наибольшее количество партий могло быть сыграно?

Ответ: 42550.

Решение. Рассмотрим граф, вершины которого — участники, а рёбра соединяют участников, не игравших друг с другом. Из условия задачи следует, что любые две вершины одинаковой степени смежны.

Заметим, что в нашем графе вершин степени 0 не более одной: если бы их было хотя бы две, то эти вершины были бы смежны, и их степени были бы не меньше 1. Также вершин степени 1 не более двух: если бы их было хотя бы три, то эти вершины были бы попарно смежны, и их степени были бы не меньше 2. Аналогично в общем случае — вершин степени k не более $k + 1$: если бы их было хотя бы $k + 2$, то эти вершины были бы попарно смежны, и их степени были бы не меньше $k + 1$.

Пусть a_k — количество вершин степени k в нашем графе ($k = 0, 1, \dots, 299$). Тогда общее число вершин в графе равно

$$300 = \sum_{k=0}^{299} a_k,$$

а число рёбер равно

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{299} k \cdot a_k.$$

Докажем лемму.

Лемма. Пусть для целых неотрицательных чисел $a_0, a_1, \dots, a_{299}$ выполнены условия:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{299} a_k = 300, \\ a_k \leq k + 1 \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots, 299. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{299} k \cdot a_k \geq \sum_{k=0}^{23} k(k+1).$$

□ Будем пользоваться равенством

$$\sum_{i=1}^{24} i = 300.$$

Набор чисел

$$a_k = \begin{cases} k + 1, & \text{если } k = 0, 1, \dots, 23, \\ 0, & \text{если } k > 23 \end{cases}$$

будем называть *модельным*.

Для модельного набора нужное неравенство обращается в равенство. Если же при некотором $k < 24$ оказалось, что $a_k \leq k$, то уменьшим на 1 любое положительное a_l , где $l \geq 24$ (такое существует) и увеличим на 1 a_k . После такой операции исследуемая сумма уменьшится на величину $l - k > 0$. Прделав несколько таких операций, получим модельный набор. ■

Из леммы следует, что наибольшее количество партий в турнире не превосходит

$$C_{300}^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{23} k(k+1) = 42550.$$

Приведём пример, в котором достигается равенство. Разобьём участников на группы размеров $1, 2, \dots, 24$ и пусть любые два участника из разных групп сыграли, а из одной — нет. Очевидно, что для этого примера все неравенства в предыдущих рассуждениях превращаются в равенства.

5.2. В шахматном турнире участвовали 210 человек. Некоторые пары участников сыграли между собой по одной партии, а остальные пары друг с

другом не играли. В конце турнира оказалось, что если двое сыграли друг с другом, то они провели разное количество партий. Какое наибольшее количество партий могло быть сыграно?

Ответ: 20615.

- 5.3.** В шахматном турнире участвовали 153 человек. Некоторые пары участников сыграли между собой по одной партии, а остальные пары друг с другом не играли. В конце турнира оказалось, что если двое сыграли друг с другом, то они провели разное количество партий. Какое наибольшее количество партий могло быть сыграно?

Ответ: 10812.

- 5.4.** В шахматном турнире участвовали 105 человек. Некоторые пары участников сыграли между собой по одной партии, а остальные пары друг с другом не играли. В конце турнира оказалось, что если двое сыграли друг с другом, то они провели разное количество партий. Какое наибольшее количество партий могло быть сыграно?

Ответ: 5005.

- 6.1.** Функция f определена на всех натуральных числах и принимает действительные значения. Известно, что для любого $n > 1$ найдётся простой делитель p числа n , для которого

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Известно также, что $f(2001) = 1$. Найдите $f(2002)$.

Ответ: 2.

Решение. Обозначим через $\Omega(n)$ количество простых множителей числа n с учётом кратности. Покажем, что $f(n)$ зависит только от $\Omega(n)$.

Положим $t = f(1)$. Применим условие к простому числу p (у него $\Omega = 1$): найдётся простой делитель, и это сам p , поэтому

$$f(p) = f(1) - f(p), \quad f(p) = \frac{t}{2}.$$

Докажем по индукции по $\Omega(n)$ равенство $f(n) = (2 - \Omega(n))\frac{t}{2}$. База индукции проверена выше. Докажем переход: пусть для всех m с $\Omega(m) < \Omega(n)$ верно $f(m) = (2 - \Omega(m))\frac{t}{2}$. По условию найдётся простой $p \mid n$ с $f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p)$, причём $\Omega\left(\frac{n}{p}\right) = \Omega(n) - 1$, поэтому

$$f(n) = \left(2 - (\Omega(n) - 1)\right)\frac{t}{2} - \frac{t}{2} = (2 - \Omega(n))\frac{t}{2}.$$

Равенство доказано.

Теперь перейдём к расчётам. Так как $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, то $\Omega(2001) = 3$ и

$$f(2001) = (2 - 3) \frac{t}{2} = -\frac{t}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{2} = -1.$$

Так как $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, имеем $\Omega(2002) = 4$ и

$$f(2002) = (2 - 4) \cdot (-1) = 2.$$

- 6.2.** Функция f определена на всех натуральных числах и принимает действительные значения. Известно, что для любого $n > 1$ найдётся простой делитель p числа n , для которого

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Известно также, что $f(1998) = 1$. Найдите $f(2002)$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

- 6.3.** Функция f определена на всех натуральных числах и принимает действительные значения. Известно, что для любого $n > 1$ найдётся простой делитель p числа n , для которого

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Известно также, что $f(2000) = 1$. Найдите $f(2001)$.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

- 6.4.** Функция f определена на всех натуральных числах и принимает действительные значения. Известно, что для любого $n > 1$ найдётся простой делитель p числа n , для которого

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

Известно также, что $f(1998) = 1$. Найдите $f(2001)$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

- 7.1.** Дана таблица размером 2025×2025 . Её клетки заполняют по одной, каждый раз выбирая любую ещё пустую клетку: в первую выбранную клетку ставят крестик, во вторую — нолик, в третью — снова крестик и так далее, пока таблица не заполнится. Пусть k — количество строк, в которых крестиков больше, чем ноликов, а l — количество столбцов, в которых ноликов больше, чем крестиков. Найдите наибольшее возможное значение $k + l$.

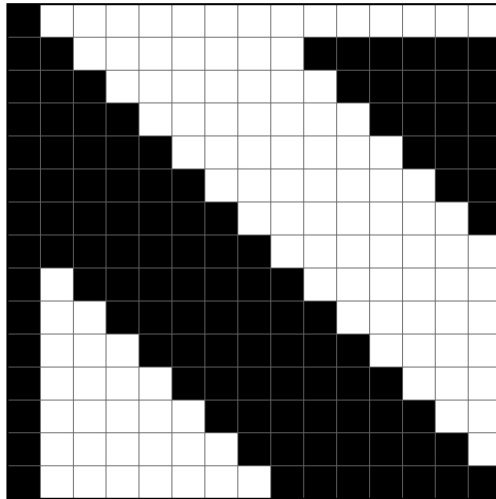
Ответ: 4048.

Решение. Всего клеток 2025^2 — нечётное число, поэтому крестиков будет на один больше, чем ноликов.

Строку будем называть *хорошей*, если в ней крестиков больше чем ноликов. Аналогично, столбец будем называть *хорошим*, если в нём ноликов больше чем крестиков.

Всего в таблице крестиков $\frac{2025^2+1}{2} < 2025 \cdot 1013$, поэтому всегда найдётся хотя бы одна строка, не являющаяся хорошей. Аналогично, всегда найдётся хотя бы один столбец, не являющийся хорошим. Следовательно, $k + l \leq 4048$.

Значение 4048 достигается. Схема примера меньшего размера приведена на рисунке ниже (чёрные клетки соответствуют крестикам, белые — ноликам).



Опишем общий вид примера для таблиц $(2n+1) \times (2n+1)$. Первый столбец заполнен крестиками, а первая строка (кроме первой клетки) заполнена ноликами. В оставшейся части таблицы (квадрате $2n \times 2n$) в каждой строке по n крестиков и n ноликов, и строки получаются друг из друга циклическими сдвигами. В этой части таблицы в каждой строке и в каждом столбце по n крестиков и n ноликов, поэтому в общей таблице все строки кроме первой и все столбцы кроме первого хорошие.

- 7.2. Дана таблица размером 2023×2023 . Её клетки заполняют по одной, каждый раз выбирая любую ещё пустую клетку: в первую выбранную клетку ставят крестик, во вторую — нолик, в третью — снова крестик и так далее, пока таблица не заполнится. Пусть k — количество строк, в которых

крестиков больше, чем ноликов, а l — количество столбцов, в которых ноликов больше, чем крестиков. Найдите наибольшее возможное значение $k + l$.

Ответ: 4044.

- 7.3. Дана таблица размером 2021×2021 . Её клетки заполняют по одной, каждый раз выбирая любую ещё пустую клетку: в первую выбранную клетку ставят крестик, во вторую — нолик, в третью — снова крестик и так далее, пока таблица не заполнится. Пусть k — количество строк, в которых крестиков больше, чем ноликов, а l — количество столбцов, в которых ноликов больше, чем крестиков. Найдите наибольшее возможное значение $k + l$.

Ответ: 4040.

- 7.4. Дана таблица размером 2027×2027 . Её клетки заполняют по одной, каждый раз выбирая любую ещё пустую клетку: в первую выбранную клетку ставят крестик, во вторую — нолик, в третью — снова крестик и так далее, пока таблица не заполнится. Пусть k — количество строк, в которых крестиков больше, чем ноликов, а l — количество столбцов, в которых ноликов больше, чем крестиков. Найдите наибольшее возможное значение $k + l$.

Ответ: 4052.

- 8.1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 7$, $DA = 8$. Точки M , P , N , Q — середины сторон AB , BC , CD , DA соответственно. Найдите $MN^2 - PQ^2$.

Ответ: 13.

Решение. Обозначим радиус-векторы вершин через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Середины сторон имеют радиус-векторы $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$, $\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}$, поэтому

$$2\overrightarrow{MN} = (\vec{c} + \vec{d}) - (\vec{a} + \vec{b}), \quad 2\overrightarrow{PQ} = (\vec{d} + \vec{a}) - (\vec{b} + \vec{c}).$$

Обозначим $\vec{u} = (\vec{c} + \vec{d}) - (\vec{a} + \vec{b})$ и $\vec{v} = (\vec{d} + \vec{a}) - (\vec{b} + \vec{c})$. Тогда

$$\vec{u} + \vec{v} = 2(\vec{d} - \vec{b}), \quad \vec{u} - \vec{v} = 2(\vec{c} - \vec{a}),$$

и по формуле разности квадратов длин

$$4MN^2 - 4PQ^2 = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 4(\vec{d} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}).$$

Значит,

$$MN^2 - PQ^2 = (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{d} - \vec{b}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}.$$

Осталось выразить это скалярное произведение через стороны. Раскроем скобки в выражении:

$$BC^2 + DA^2 - AB^2 - CD^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{d}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2 - |\vec{d} - \vec{c}|^2.$$

Все квадраты длин векторов сокращаются, и остаётся

$$-2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{d} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{c} \cdot \vec{d} = 2(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{d} - \vec{b}).$$

Следовательно,

$$MN^2 - PQ^2 = \frac{BC^2 + DA^2 - AB^2 - CD^2}{2} = \frac{36 + 64 - 25 - 49}{2} = 13.$$

В частности, ответ зависит только от длин сторон и не зависит от формы четырёхугольника.

- 8.2.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 4$, $BC = 5$, $CD = 6$, $DA = 7$. Точки M , P , N , Q — середины сторон AB , BC , CD , DA соответственно. Найдите $MN^2 - PQ^2$.

Ответ: 11.

- 8.3.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 6$, $BC = 8$, $CD = 9$, $DA = 11$. Точки M , P , N , Q — середины сторон AB , BC , CD , DA соответственно. Найдите $MN^2 - PQ^2$.

Ответ: 34.

- 8.4.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 3$, $BC = 7$, $CD = 5$, $DA = 9$. Точки M , P , N , Q — середины сторон AB , BC , CD , DA соответственно. Найдите $MN^2 - PQ^2$.

Ответ: 48.

- 9.1.** Робот-пылесос стоит в точке 0 числовой прямой и должен убрать пятна, расположенные в точках 1, 2, ..., 31. Он выбирает случайное (равновероятно) неубранное пятно, едет к нему и убирает; так продолжается, пока пятен не останется. После этого робот возвращается на базу в точку 0. Найдите математическое ожидание длины его пути.

Поскольку все пути равновероятны, то математическое ожидание в данном случае — это просто среднее арифметическое длин всех возможных путей.

Ответ: 352.

Решение. Робот проезжает 32 отрезка: путь от базы до первого пятна, 30 переездов между последовательными пятнами и возвращение с последнего пятна на базу. Длина всего пути — сумма длин этих отрезков, поэтому

математическое ожидание длины пути равно сумме математических ожиданий длин отрезков.

Первый и последний отрезки. Первое пятно равновероятно является любым из чисел $1, \dots, 31$, поэтому ожидаемая длина первого отрезка равна

$$\frac{1 + 2 + \dots + 31}{31} = \frac{31 \cdot 32/2}{31} = 16.$$

Последнее пятно тоже равновероятно любое из 31 чисел, поэтому ожидаемая длина последнего отрезка тоже равна 16.

Промежуточные отрезки. Рассмотрим переезд с i -го убранного пятна на $(i + 1)$ -е. Упорядоченная пара (какое пятно убрано i -м, какое $(i + 1)$ -м) равновероятно является любой из упорядоченных пар различных чисел от 1 до 31, поэтому ожидаемая длина такого переезда одна и та же для всех i и равна среднему значению $|x - y|$ по всем упорядоченным парам различных x, y .

Посчитаем сумму $\sum |x - y|$ по неупорядоченным парам: разность d встречается у $31 - d$ пар, поэтому

$$\sum_{x < y} (y - x) = \sum_{d=1}^{30} d(31 - d) = 31 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} - \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} = 14415 - 9455 = 4960.$$

Неупорядоченных пар $C_{31}^2 = 465$, поэтому среднее значение $|x - y|$ равно $\frac{4960}{465} = \frac{32}{3}$.

Итог. Промежуточных переездов ровно 30, поэтому

$$16 + 16 + 30 \cdot \frac{32}{3} = 32 + 320 = 352.$$

- 9.2.** Робот-пылесос стоит в точке 0 числовой прямой и должен убрать пятна, расположенные в точках $1, 2, \dots, 25$. Он выбирает случайное (равновероятно) неубранное пятно, едет к нему и убирает; так продолжается, пока пятен не останется. После этого робот возвращается на базу в точку 0. Найдите математическое ожидание длины его пути.

Поскольку все пути равновероятны, то математическое ожидание в данном случае — это просто среднее арифметическое длин всех возможных путей.

Ответ: 234.

- 9.3.** Робот-пылесос стоит в точке 0 числовой прямой и должен убрать пятна, расположенные в точках $1, 2, \dots, 21$. Он выбирает случайное (равновероятно) неубранное пятно, едет к нему и убирает; так продолжается, пока пятен не останется. После этого робот возвращается на базу в точку 0. Найдите математическое ожидание длины его пути.

Поскольку все пути равновероятны, то математическое ожидание в данном случае — это просто среднее арифметическое длин всех возможных путей.

Ответ: $\frac{506}{3}$.

- 9.4. Робот-пылесос стоит в точке 0 числовой прямой и должен убрать пятна, расположенные в точках 1, 2, ..., 15. Он выбирает случайное (равновероятно) неубранное пятно, едет к нему и убирает; так продолжается, пока пятен не останется. После этого робот возвращается на базу в точку 0. Найдите математическое ожидание длины его пути.

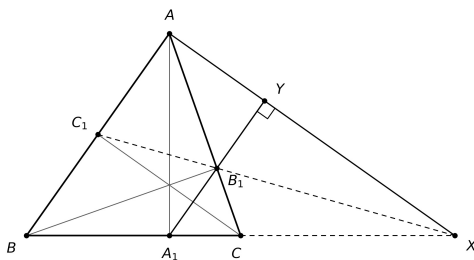
Поскольку все пути равновероятны, то математическое ожидание в данном случае — это просто среднее арифметическое длин всех возможных путей.

Ответ: $\frac{272}{3}$.

- 10.1. Дан остроугольный треугольник ABC с $AB > AC$. В нём проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Прямые BC и B_1C_1 пересекаются в точке X , а прямые A_1B_1 и AX — в точке Y . Оказалось, что $A_1B_1 = B_1Y$ и $A_1Y \perp AX$. Найдите отношение $\frac{B_1Y}{B_1X}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решение.

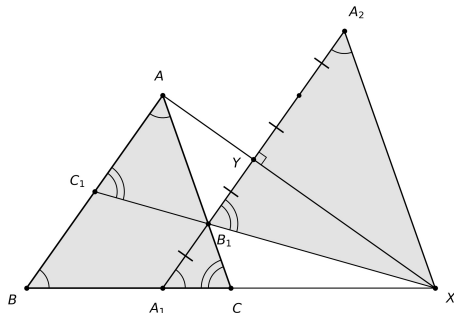


Известно, что четвёрка точек $(B, C; A_1, X)$ гармоническая (например, это следует из теорем Чевы и Менелая для треугольника ABC). При центральной проекции с центром A на прямую A_1Y эта четвёрка переходит в четвёрку $(B^*, B_1; A_1, Y)$, где B^* — точка пересечения прямых AB и A_1Y . Так как полученная четвёрка точек тоже гармоническая и $A_1B_1 = B_1Y$, то точка B^* бесконечно удалённая, то есть прямые A_1Y и AB параллельны.

Из этой параллельности следует, что треугольники YA_1X и ABX гомотетичны с центром в точке X . При этой гомотетии B_1 переходит в C_1 , и

так как $A_1B_1 = B_1Y$, то $BC_1 = C_1A$. Это значит, что CC_1 — медиана и высота в треугольнике ABC , поэтому $AC = BC$.

Обозначим углы треугольника ABC : $\angle A = \angle B = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Из вписанности четырёхугольника BC_1B_1C следует, что $\angle AC_1B_1 = \angle C = \gamma$, а из параллельности AB и A_1Y — что $\angle B_1A_1C = \angle B = \alpha$ и $\angle YB_1X = \angle AC_1B_1 = \gamma$.



Рассмотрим точку A_2 , симметричную точке A_1 относительно прямой AX . В треугольнике A_2B_1X углы A_2 и B_1 равны α и γ , поэтому $\triangle A_2B_1X \sim \triangle ACB$, и $A_2B_1 = B_1X$. Так как $A_2B_1 = 3B_1Y$, то $\frac{B_1Y}{B_1X} = \frac{1}{3}$.

- 10.2.** Дан остроугольный треугольник ABC с $AB > AC$. В нём проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Прямые BC и B_1C_1 пересекаются в точке X , а прямые A_1B_1 и AX — в точке Y . Оказалось, что $A_1B_1 = B_1Y$ и $A_1Y \perp AX$. Найдите отношение $\frac{A_1Y}{B_1X}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

- 10.3.** Дан остроугольный треугольник ABC с $AB > AC$. В нём проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Прямые BC и B_1C_1 пересекаются в точке X , а прямые A_1B_1 и AX — в точке Y . Оказалось, что $A_1B_1 = B_1Y$ и $A_1Y \perp AX$. Найдите отношение $\frac{B_1X}{B_1Y}$.

Ответ: 3.

- 10.4.** Дан остроугольный треугольник ABC с $AB > AC$. В нём проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Прямые BC и B_1C_1 пересекаются в точке X , а прямые A_1B_1 и AX — в точке Y . Оказалось, что $A_1B_1 = B_1Y$ и $A_1Y \perp AX$. Найдите отношение $\frac{B_1X}{A_1Y}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

- 11.1.** Из чисел $1, 2, \dots, 20\,000$ выбирают несколько так, чтобы разность никаких двух выбранных чисел не равнялась ни 4, ни 7. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать?

Ответ: 9092.

Решение. Оценка. Разобьём числа от 1 до 20 000 на группы по 11 подряд идущих: $\{1, \dots, 11\}$, $\{12, \dots, 22\}$ и так далее. Так как $20\,000 = 11 \cdot 1818 + 2$, получится 1818 полных групп и ещё два числа.

Покажем, что из каждой группы можно взять не более пяти чисел. Рассмотрим одиннадцать чисел группы по кругу в порядке

$$1, 5, 9, 2, 6, 10, 3, 7, 11, 4, 8$$

(каждое следующее больше предыдущего на 4, а если выходим за пределы группы — меньше на 7). Соседние в этом круге числа отличаются ровно на 4 или ровно на 7, поэтому двух соседей выбрать нельзя. В круге из 11 элементов попарно несоседних можно выбрать не более пяти.

Значит, выбранных чисел не больше $1818 \cdot 5 + 2 = 9092$.

Пример. Возьмём все числа, дающие при делении на 11 остатки 1, 2, 4, 7, 10. В указанном круге эти пять остатков попарно несоседние, поэтому разность двух выбранных чисел никогда не равна 4 или 7: разности чисел из одной группы не равны 4 и 7 по построению, а числа из разных групп либо отличаются больше чем на 7, либо дают ту же пару остатков.

Среди чисел от 1 до 20 000 таких ровно 9092. Итак, ответ 9092.

- 11.2.** Из чисел $1, 2, \dots, 15\,000$ выбирают несколько так, чтобы разность никаких двух выбранных чисел не равнялась ни 4, ни 7. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать?

Ответ: 6819.

- 11.3.** Из чисел $1, 2, \dots, 25\,000$ выбирают несколько так, чтобы разность никаких двух выбранных чисел не равнялась ни 4, ни 7. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать?

Ответ: 11364.

- 11.4.** Из чисел $1, 2, \dots, 30\,000$ выбирают несколько так, чтобы разность никаких двух выбранных чисел не равнялась ни 4, ни 7. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать?

Ответ: 13637.

- 12.1.** Многочлен $f(x) = x^{2007} + 17x^{2006} + 1$ имеет 2007 различных корней $r_1, r_2, \dots, r_{2007}$ (некоторые из которых комплексные). Многочлен P степени 2007 таков, что

$$P\left(r_j + \frac{1}{r_j}\right) = 0 \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, 2007.$$

Найдите значение $\frac{P(1)}{P(-1)}$.

Ответ: $\frac{289}{259}$.

Решение. Многочлен P имеет степень 2007 и обращается в ноль в 2007 точках $r_j + \frac{1}{r_j}$, поэтому

$$P(y) = c \prod_{j=1}^{2007} \left(y - r_j - \frac{1}{r_j} \right)$$

при некотором $c \neq 0$ (несложно проверить, что все $r_j + \frac{1}{r_j}$ различны). Множитель c сократится, поэтому

$$\frac{P(1)}{P(-1)} = \prod_{j=1}^{2007} \frac{1 - r_j - \frac{1}{r_j}}{-1 - r_j - \frac{1}{r_j}} = \prod_{j=1}^{2007} \frac{r_j - r_j^2 - 1}{-r_j - r_j^2 - 1} = \prod_{j=1}^{2007} \frac{r_j^2 - r_j + 1}{r_j^2 + r_j + 1},$$

где в последнем переходе числитель и знаменатель умножены на -1 .

Разложим квадратные трёхчлены. Пусть $\omega = e^{i\pi/3}$ — корень уравнения $y^2 - y + 1 = 0$, а $\zeta = e^{2i\pi/3}$ — корень уравнения $y^2 + y + 1 = 0$. Тогда

$$r^2 - r + 1 = (r - \omega)(r - \bar{\omega}), \quad r^2 + r + 1 = (r - \zeta)(r - \bar{\zeta}).$$

Для многочлена f с корнями $r_1, \dots, r_{2007}$ и старшим коэффициентом 1 верно $f(a) = \prod_j (a - r_j)$, поэтому $\prod_j (r_j - a) = (-1)^{2007} f(a) = -f(a)$. Значит,

$$\frac{P(1)}{P(-1)} = \frac{\prod_j (r_j - \omega) \prod_j (r_j - \bar{\omega})}{\prod_j (r_j - \zeta) \prod_j (r_j - \bar{\zeta})} = \frac{f(\omega)f(\bar{\omega})}{f(\zeta)f(\bar{\zeta})}.$$

Вычислим значения. Так как $\omega^6 = 1$, а $2007 = 6 \cdot 334 + 3$, имеем $\omega^{2007} = \omega^3 = -1$ и $\omega^{2006} = \omega^2 = \omega - 1$ (последнее — из $\omega^2 - \omega + 1 = 0$). Поэтому

$$f(\omega) = -1 + 17(\omega - 1) + 1 = 17(\omega - 1),$$

$$f(\omega)f(\bar{\omega}) = 289(\omega - 1)(\bar{\omega} - 1) = 289(1 - (\omega + \bar{\omega}) + 1) = 289(2 - 1) = 289,$$

поскольку $\omega + \bar{\omega} = 2 \cos 60^\circ = 1$ и $\omega\bar{\omega} = 1$.

Так как $\zeta^3 = 1$, имеем $\zeta^{2007} = 1$ и $\zeta^{2006} = \zeta^2$, поэтому

$$f(\zeta) = 1 + 17\zeta^2 + 1 = 17\zeta^2 + 2,$$

$$f(\zeta)f(\bar{\zeta}) = (17\zeta^2 + 2)(17\bar{\zeta}^2 + 2) = 289 + 34(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2) + 4 = 289 - 34 + 4 = 259,$$

поскольку $\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 = \zeta + \bar{\zeta} = -1$ и $\zeta\bar{\zeta} = 1$.

Итого

$$\frac{P(1)}{P(-1)} = \frac{289}{259}.$$

- 12.2.** Многочлен $f(x) = x^{2007} + 5x^{2006} + 1$ имеет 2007 различных корней $r_1, r_2, \dots, r_{2007}$ (некоторые из которых комплексные). Многочлен P степени 2007 таков, что

$$P\left(r_j + \frac{1}{r_j}\right) = 0 \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, 2007.$$

Найдите значение $\frac{P(1)}{P(-1)}$.

Ответ: $\frac{25}{19}$.

- 12.3.** Многочлен $f(x) = x^{2011} + 17x^{2010} + 1$ имеет 2011 различных корней $r_1, r_2, \dots, r_{2011}$ (некоторые из которых комплексные). Многочлен P степени 2011 таков, что

$$P\left(r_j + \frac{1}{r_j}\right) = 0 \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, 2011.$$

Найдите значение $\frac{P(1)}{P(-1)}$.

Ответ: $\frac{343}{307}$.

- 12.4.** Многочлен $f(x) = x^{2009} + 7x^{2008} + 1$ имеет 2009 различных корней $r_1, r_2, \dots, r_{2009}$ (некоторые из которых комплексные). Многочлен P степени 2009 таков, что

$$P\left(r_j + \frac{1}{r_j}\right) = 0 \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, 2009.$$

Найдите значение $\frac{P(1)}{P(-1)}$.

Ответ: $\frac{13}{9}$.