Тренировочная олимпиада. Пять задач.

Задача 1. Прямоугольник 100×1000 разрезан на доминошки. Докажите, что найдётся другое такое разрезание этого прямоугольника на доминошки, что у этих двух разрезаний нет общих доминошек.

Решение. Разобьём прямоугольник 100×1000 на квадраты 2×2. Внутри каждого такого квадрата исходное замощение не может содержать одновременно горизонтальное и вертикальное домино, так как в квадрате 2×2 любое горизонтальное домино пересекается с любым вертикальным домино. Следовательно, можно построить замощение, в котором каждый квадрат 2×2 замощён двумя домино, причём ни одно из них не входит в исходное замощение, что и требовалось. □

Задача 2. В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ из 100 попарно различных действительных чисел назовём индекс $i \in \{2, 3, \ldots, 99\}$ *хорошим*, если

$$a_1 + \cdots + a_{i-1} = a_{i+1} + \cdots + a_{100}.$$

Каково наибольшее возможное число хороших индексов?

Ответ: 66.

Решение. **Оценка.** Положим $P_i = a_1 + \cdots + a_{i-1}$ и обозначим через T сумму всех членов последовательности. Правая часть равенства из условия равна $T - P_{i+1}$, поэтому индекс i хорош тогда и только тогда, когда $P_i + P_{i+1} = T$.

Если индексы i и $i+1$ хороши, то, вычитая соответствующие равенства, получаем $P_i = P_{i+2}$, то есть $a_i + a_{i+1} = 0$. Следовательно, три последовательных индекса не могут быть хорошими одновременно. Действительно, если хороши $i, i+1, i+2$, то $a_i + a_{i+1} = 0$ и $a_{i+1} + a_{i+2} = 0$, откуда $a_i = a_{i+2}$, что противоречит попарной различности чисел.

Разобьём индексы от 2 до 97 на 32 тройки последовательных индексов. В каждой тройке хороших индексов не более двух. Индексы 98 и 99 могут добавить ещё не более двух хороших индексов. Поэтому общее число хороших индексов не превосходит $32 \cdot 2 + 2 = 66$.

Пример. Будем строить последовательность блоками $x, -x$: если сумма членов перед таким блоком равна S, а $2S + x = T$, то оба индекса членов блока хороши. После блока сумма снова равна S. Поэтому между соседними блоками $x, -x$ и $x', -x'$ достаточно вставить число $(x - x')/2$.

Возьмём $x = r^2$. Положим

$$a_1 = \frac{1}{3}, \qquad a_{3r-1} = r^2, \qquad a_{3r} = -r^2 \quad (1 \leqslant r \leqslant 33),$$

а также $a_{3r+1} = -r - \frac{1}{2}$ при $1 \leqslant r \leqslant 32$ и $a_{100} = \frac{1636}{3}$.

Все числа различны: здесь есть положительные квадраты, отрицательные квадраты, отрицательные полуцелые числа и два положительных нецелых числа. Сумма всей

последовательности равна $T = \frac{5}{3}$. Перед парой $r^2, -r^2$ сумма равна $S_r = \frac{1}{3} + \frac{1-r^2}{2}$, поэтому $2S_r + r^2 = \frac{5}{3} = T$. Значит, оба индекса этой пары хороши.

Таких пар 33, поэтому мы получили 66 хороших индексов. Вместе с оценкой сверху это доказывает, что максимум равен 66. □

Задача 3. В команде Гулливера все матросы разного роста. Некоторые из них дружат, и дружба взаимна. Назовем матроса *лилипутом*, если он ниже всех своих друзей, и *великаном*, если он выше всех своих друзей (матрос, у которого нет друзей, является и лилипутом, и великаном одновременно). Группа матросов называется *фотогеничной*, если их можно выстроить по возрастанию роста слева направо так, что самый левый — лилипут, самый правый — великан, а любые двое стоящих рядом дружат. Пусть k — натуральное число, на которое не делится размер ни одной фотогеничной группы. Докажите, что всех матросов можно рассадить за k столов так, чтобы никакие два матроса за одним столом не были друзьями.

Решение. Назовём *восходящей цепочкой* последовательность матросов, в которой каждый следующий выше предыдущего и любые два соседних матроса дружат. Длиной цепочки будем называть число матросов в ней.

Заметим, что от любого матроса можно по дружеским связям спуститься до лилипута: пока у текущего матроса есть более низкий друг, переходим к нему. Каждый раз рост уменьшается, поэтому когда-нибудь процесс закончится. Если прочитать полученную цепочку в обратном порядке, она будет восходящей и пойдёт от лилипута к выбранному матросу.

Точно так же от любого матроса можно подняться до великана: пока у текущего матроса есть более высокий друг, переходим к нему. Поскольку рост каждый раз увеличивается, этот процесс тоже обязательно закончится.

Теперь рассадим матросов по очереди, от самого низкого к самому высокому. Пронумеруем столы остатками $0, 1, \ldots, k-1$ по модулю k. Будем соблюдать такое правило: для каждого уже посаженного матроса номер его стола должен совпадать по модулю k с длиной некоторой восходящей цепочки от лилипута до него.

Пусть пришла очередь определять место матроса a. Рассмотрим все возможные остатки по модулю k от длин восходящих цепочек, идущих от лилипута до a. Хотя бы одна такая цепочка существует. Если среди этих остатков есть номер стола, за которым не сидит ни один друг матроса a, посадим a за этот стол. Тогда правило рассадки сохранится.

Покажем, что подходящий стол всегда найдётся. Предположим обратное: каждый возможный остаток уже является номером стола, за которым сидит какой-то друг матроса a. Возьмём один такой остаток x. За столом x сидит некоторый друг u матроса a. По правилу рассадки до u можно дойти от лилипута по восходящей цепочке, длина которой даёт остаток x. Добавим в конец этой цепочки матроса a. Получится цепочка до a, длина которой даёт остаток $x + 1$.

Значит, если возможен остаток x, то возможен и следующий остаток $x + 1$. Поэтому возможны все остатки $0, 1, \ldots, k-1$.

Теперь поднимемся от a по дружеским связям до великана. Пусть получилась восходящая цепочка $a = w_1, w_2, \ldots, w_t$. Поскольку до a возможна цепочка любой длины по модулю k, можно выбрать восходящую цепочку $v_1, v_2, \ldots, v_s = a$ от лилипута до a, для которой $s \equiv 1 - t \pmod{k}$. Соединим эти две цепочки:

$$v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, a, w_2, \ldots, w_t.$$

Это фотогеничная группа, а число матросов в ней равно $s+t-1 \equiv 0 \pmod{k}$. Получилась фотогеничная группа, размер которой делится на k, что противоречит условию задачи.

Значит, для матроса a всегда можно выбрать подходящий стол. Продолжая так действовать, мы рассадим всех матросов. Два друга не могут оказаться за одним столом: когда мы рассаживали более высокого из них, за столом более низкого уже сидел его друг, поэтому этот стол не мог быть выбран.

Таким образом, k столов достаточно. □

Задача 4. Назовём степень двойки *компактной*, если она представляется в виде суммы не более чем 10^{10} необязательно различных факториалов натуральных чисел. Конечно ли множество компактных степеней двойки?

Ответ: да, конечно.

Решение. Докажем более сильное утверждение: для любых целых $m, n \geqslant 0$ уравнение $a_1! + \cdots + a_m! = 2^b - n$ имеет лишь конечное число решений $(a_1, \ldots, a_m, b)$ в целых числах, удовлетворяющих условию $1 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m$.

Проведём индукцию по m. При $m = 0$ уравнение принимает вид $2^b = n$, поэтому для каждого n существует не более одного решения.

Пусть утверждение доказано для $m - 1$; докажем его для m. При фиксированном n покажем, что число возможных значений a_1 конечно.

Если $n = 0$, то $a_1 \leqslant 2$: в противном случае все факториалы в левой части делились бы на 3, а степень двойки на 3 не делится.

Пусть теперь $n > 0$. Поскольку левая часть положительна, имеем $2^b > n$, откуда $b > \nu_2(n)$, где $\nu_2(n)$ обозначает степень вхождения двойки в число n. Поэтому

$$\nu_2(n) = \nu_2(2^b - n) = \nu_2(a_1! + \cdots + a_m!) \geqslant \nu_2(a_1!).$$

Но $\nu_2(a_1!) \to \infty$ при $a_1 \to \infty$, так что возможных значений a_1 лишь конечное число.

Для каждого из этих значений уравнение переписывается в виде $a_2! + \cdots + a_m! = 2^b - (n + a_1!)$. По предположению индукции оно имеет лишь конечное число решений. Поскольку и возможных значений a_1 конечное число, индукционный переход доказан.

Теперь для каждого $m \leqslant 10^{10}$ уравнение $a_1! + \cdots + a_m! = 2^b$ имеет лишь конечное число решений. Значений m тоже конечное число, поэтому множество компактных степеней двойки конечно. □

Задача 5. В треугольнике ABC, $\angle B = 120^\circ$, точка M — середина стороны AC. На сторонах AB и BC выбраны такие точки K и L соответственно, что $KL \parallel AC$. Докажите, что $MK + ML \geqslant MA$.

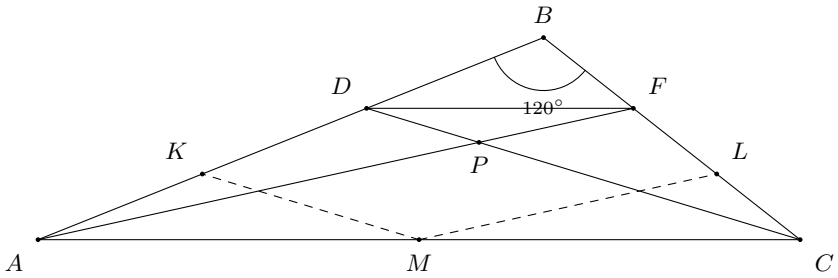
Решение. Отразим точку A относительно K и обозначим полученную точку через D. Аналогично отразим точку C относительно L и обозначим её образ через F. Тогда K и L — середины отрезков AD и CF. Поскольку $KL \parallel AC$, также $DF \parallel AC$.

В треугольнике ACD отрезок MK соединяет середины сторон AC и AD, поэтому $CD = 2MK$. Аналогично из треугольника ACF получаем $AF = 2ML$. Следовательно, требуемое неравенство равносильно $CD + AF \geqslant AC$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Прямая KL совпадает со средней линией треугольника ABC, параллельной AC, или лежит между этой средней линией и AC.

Тогда D лежит на отрезке AB, а F — на отрезке BC. Пусть прямые CD и AF пересекаются в точке P. По неравенству треугольника



$$CD + AF = (CP + PD) + (AP + PF) \geqslant AC + DF \geqslant AC.$$

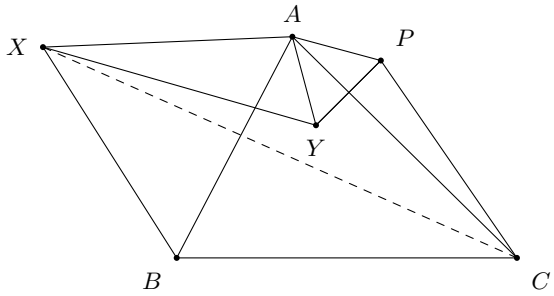
Действительно, $CP + AP \geqslant AC$ и $PD + PF \geqslant DF$.

Случай 2. Прямая KL лежит между средней линией и вершиной B.

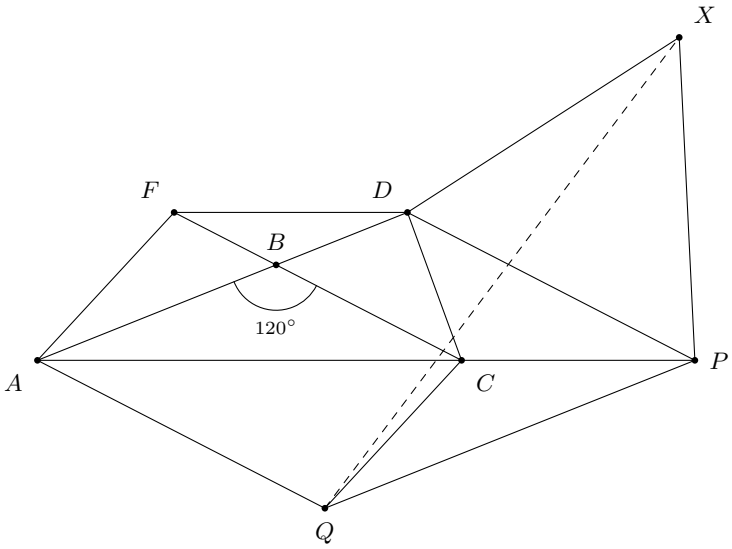
В этом случае точки D и F лежат на продолжениях сторон AB и CB за точку B, а четырёхугольник $ACDF$ является трапецией, $AC \parallel DF$. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. На стороне AB треугольника ABC внешним образом построен равносторонний треугольник ABX. Тогда для любой точки P выполняется $PA + PB + PC \geqslant CX$.

Доказательство леммы. Построим равносторонний треугольник APY, ориентированный так же, как ABX. Поворот на 60° вокруг точки A переводит B в X, а P в Y, поэтому треугольники ABP и AXY равны. В частности, $PB = XY$, а $PA = PY$. Следовательно, по неравенству для ломаной PYC имеем $PA+PB+PC = PY+YX+PC \geqslant CX$. Лемма доказана.



Вернёмся к трапеции $ACDF$. Достроим параллелограммы $FDPC$ и $AFCQ$, а на стороне DP внешним образом построим равносторонний треугольник DPX.



Треугольник QCP получается из треугольника AFD параллельным переносом, поэтому $QP = AD$ и $CQ = AF$. Кроме того, $\angle DPQ = 60^\circ$ и $\angle ADP = 120^\circ$. Так как треугольник DPX равносторонний, то $PX = DP$ и $\angle QPX = 120^\circ = \angle ADP$. Следовательно, треугольники QPX и ADP равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $QX = AP$.

Применим лемму к треугольнику DPQ и точке C. Получаем

$$CD + CP + CQ \geqslant QX = AP = AC + CP.$$

Сокращая CP и учитывая, что $CQ = AF$, получаем $CD + AF \geqslant AC$.

Итак, в обоих случаях $CD + AF \geqslant AC$. Поскольку $CD = 2MK$, $AF = 2ML$ и $AC = 2MA$, после деления на 2 получаем $MK + ML \geqslant MA$, что и требовалось доказать. $\square$