Тренировочная олимпиада. Пять задач.

Задача 1. Прямоугольник 100×1000 разрезан на доминошки. Докажите, что найдётся другое такое разрезание этого прямоугольника на доминошки, что у этих двух разрезаний нет общих доминошек.

Задача 2. В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ из 100 попарно различных действительных чисел назовём индекс $i \in \{2, 3, \ldots, 99\}$ *хорошим*, если

$$a_1 + \cdots + a_{i-1} = a_{i+1} + \cdots + a_{100}.$$

Каково наибольшее возможное число хороших индексов?

Задача 3. В команде Гулливера все матросы разного роста. Некоторые из них дружат, и дружба взаимна. Назовем матроса *лилипутом*, если он ниже всех своих друзей, и *великаном*, если он выше всех своих друзей (матрос, у которого нет друзей, является и лилипутом, и великаном одновременно). Группа матросов называется *фотогеничной*, если их можно выстроить по возрастанию роста слева направо так, что самый левый — лилипут, самый правый — великан, а любые двое стоящих рядом дружат. Пусть k — натуральное число, на которое не делится размер ни одной фотогеничной группы. Докажите, что всех матросов можно рассадить за k столов так, чтобы никакие два матроса за одним столом не были друзьями.

Задача 4. Назовём степень двойки *компактной*, если она представляется в виде суммы не более чем 10^{10} необязательно различных факториалов натуральных чисел. Конечно ли множество компактных степеней двойки?

Задача 5. В треугольнике ABC, $\angle B = 120^\circ$, точка M — середина стороны AC. На сторонах AB и BC выбраны такие точки K и L соответственно, что $KL \parallel AC$. Докажите, что $MK + ML \geqslant MA$.