Тренировочная олимпиада. Четыре задачи.

Задача 1. Натуральные числа Ц, П, М удовлетворяют соотношению

$$\text{Ц}\cdot\text{П}+\text{П}\cdot\text{М}+\text{М}\cdot\text{Ц}=(\text{Ц}+\text{П}+\text{М})\cdot\sqrt[3]{\text{Ц}\cdot\text{П}\cdot\text{М}}.$$

Докажите, что эти три числа в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию.

Решение. Обозначим $p=\text{Ц}+\text{П}+\text{М}$, $q=\text{Ц}\cdot\text{П}+\text{П}\cdot\text{М}+\text{М}\cdot\text{Ц}$, $r=\sqrt[3]{\text{Ц}\cdot\text{П}\cdot\text{М}}$. По теореме Виета имеет место равенство

$$P(x):=x^3-px^2+qx-r=(x-\text{Ц})(x-\text{П})(x-\text{М}). \tag{1}$$

Равенство из условия переписывается как $q=p\sqrt[3]{r}\iff r=\left(\frac{q}{p}\right)^3$. Заметим, что $x=\frac{q}{p}$ является корнем $P(x)$. Действительно,

$$P\Big(\frac{q}{p}\Big)=\Big(\frac{q}{p}\Big)^3-p\Big(\frac{q}{p}\Big)^2+q\Big(\frac{q}{p}\Big)-r=\Big(\Big(\frac{q}{p}\Big)^3-r\Big)+\Big(-\Big(\frac{q^2}{p}\Big)+\Big(\frac{q^2}{p}\Big)\Big)=0.$$

Пользуясь (1), получаем, что

$$\Big(\frac{q}{p}-\text{Ц}\Big)\Big(\frac{q}{p}-\text{П}\Big)\Big(\frac{q}{p}-\text{V}\Big)=0\iff$$
$$\Big(q-p\text{Ц}\Big)\Big(q-p\text{П}\Big)\Big(q-p\text{М}\Big)=0\iff$$
$$\Big(\text{П}\cdot\text{М}-\text{Ц}^2\Big)\Big(\text{М}\cdot\text{Ц}-\text{П}^2\Big)\Big(\text{Ц}\cdot\text{П}-\text{М}^2\Big)=0,$$

откуда немедленно вытекает требуемое. □

Задача 2. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что P лежит между B и Q. Лучи AP и AQ делят угол BAC на три равные части. Оказалось, что треугольник APQ является остроугольным. Обозначим через B_1, P_1, Q_1, C_1 проекции точек B, P, Q, C на прямые AP, AQ, AP, AQ соответственно. Докажите, что прямые B_1P_1 и C_1Q_1 пересекаются на прямой BC.

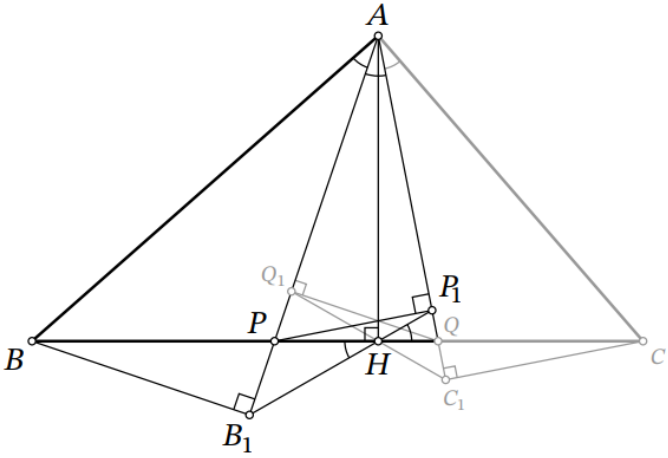
Решение. **Первый способ.** Проведём высоту AH в треугольнике ABC (рис. 1). Точки A, B, B_1, H лежат на окружности с диаметром AB, а точки A, P, P_1, H лежат на окружности с диаметром AP. Следовательно,

$$\angle BHB_1=\angle BAB_1=\angle PAP_1=\angle QHP_1,$$

то есть прямые HB_1 и HP_1 совпадают, откуда точки B_1, H, P_1 лежат на одной прямой. Аналогично точки C_1, H, P_1 лежат на одной прямой.

Второй способ. Обозначим через X и Y точки пересечения прямых B_1P_1 и C_1Q_1 с прямой BC соответственно. По теореме Менелая

$$\frac{PX}{XQ}\cdot\frac{QR_1}{R_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1P}=1\quad\text{и}\quad\frac{QY}{YP}\cdot\frac{PQ_1}{Q_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1Q}=1.$$



Перемножив эти равенства, получим

$$\frac{XQ}{PX}\cdot\frac{YP}{QY}=\frac{QR_1}{R_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1P}\cdot\frac{PQ_1}{Q_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1Q}=\left(\frac{QR_1}{C_1Q}\cdot\frac{AC_1}{R_1A}\right)\cdot\left(\frac{PQ_1}{B_1P}\cdot\frac{AB_1}{Q_1A}\right). \qquad (*)$$

Заметим, что $QR_1 : C_1Q = QP : CQ = AP : AC = R_1A : AC_1$ и $PQ_1 : B_1P = PQ : BP = AQ : AB = Q_1A : AB_1$. Следовательно, правая часть равенства (*) равна 1. Таким образом, $QX : XP = QY : YP$, то есть точки X и Y совпадают. □

Задача 3. Назовём степень двойки *компактной*, если она представляется в виде суммы не более чем 10^{10} необязательно различных факториалов натуральных чисел. Конечно ли множество компактных степеней двойки?

Ответ: да, конечно.

Решение. Докажем более сильное утверждение: для любых целых $m, n \geqslant 0$ уравнение $a_1! + \cdots + a_m! = 2^b - n$ имеет лишь конечное число решений $(a_1, \ldots, a_m, b)$ в целых числах, удовлетворяющих условию $1 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m$.

Проведём индукцию по m. При $m = 0$ уравнение принимает вид $2^b = n$, поэтому для каждого n существует не более одного решения.

Пусть утверждение доказано для $m - 1$; докажем его для m. При фиксированном n покажем, что число возможных значений a_1 конечно.

Если $n = 0$, то $a_1 \leqslant 2$: в противном случае все факториалы в левой части делились бы на 3, а степень двойки на 3 не делится.

Пусть теперь $n > 0$. Поскольку левая часть положительна, имеем $2^b > n$, откуда $b > v_2(n)$, где v_2 обозначает степень вхождения двойки в число n. Поэтому

$$v_2(n) = v_2(2^b - n) = v_2(a_1! + \cdots + a_m!) \geqslant v_2(a_1!).$$

Но $v_2(a_1!) \to \infty$ при $a_1 \to \infty$, так что возможных значений a_1 лишь конечное число.

Для каждого из этих значений уравнение переписывается в виде $a_2! + \cdots + a_m! = 2^b - (n + a_1!)$. По предположению индукции оно имеет лишь конечное число решений. Поскольку и возможных значений a_1 конечное число, индукционный переход доказан.

Теперь для каждого $m \leqslant 10^{10}$ уравнение $a_1! + \cdots + a_m! = 2^b$ имеет лишь конечное число решений. Значений m тоже конечное число, поэтому множество компактных степеней двойки конечно. □

Задача 4. Докажите, что в графе можно ориентировать рёбра так, чтобы из любой вершины можно было попасть в любую другую, тогда и только тогда, когда при удалении любого ребра в этом графе он остаётся связным.

Решение. **Определения.** Ориентация, обладающая указанным свойством, называется *сильной*. Ребро, после удаления которого граф становится несвязным, называется *мостом*. Таким образом, требуется доказать, что связный граф допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда в нём нет мостов.

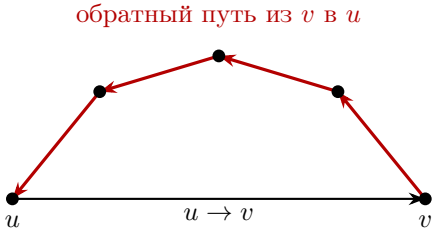
Идея. Если ребро является мостом, после его удаления граф распадается на две части. Как бы мы ни направили это ребро, перейти через него можно будет только в одну сторону. Поэтому сильной ориентации у такого графа быть не может.

Значит, отсутствие мостов — необходимое условие. Чтобы доказать, что его достаточно, заметим следующее: если ребро не является мостом, его концы можно соединить другим путём, то есть это ребро лежит на цикле. Цикл очень легко ориентировать сильно: достаточно направить все его рёбра по кругу. После этого весь цикл можно считать одной большой вершиной. Так мы уменьшаем число вершин и приходим к индукции.

Именно эту идею теперь аккуратно реализуем.

Необходимость. Предположим, что граф уже имеет сильную ориентацию. Возьмём любое его ребро, направленное из u в v. Так как из любой вершины можно попасть в любую другую, существует ориентированный путь из v обратно в u. Можно выбрать этот путь простым; тогда он не содержит ребро $u \to v$.

Следовательно, даже после удаления ребра uv его концы по-прежнему соединены путём. Вместе с ребром uv этот путь образует цикл.



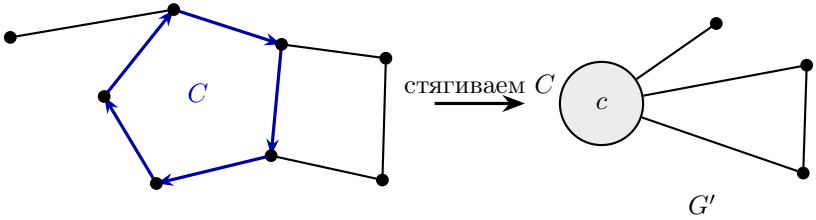
Итак, каждое ребро графа лежит на цикле. Удаление ребра, лежащего на цикле, не нарушает связность: вместо него между его концами можно пройти по остальной части цикла. Значит, в графе нет мостов.

Достаточность. Пусть теперь удаление любого ребра оставляет граф связным. Докажем, что граф допускает сильную ориентацию, индукцией по числу вершин. После стягивания могут возникнуть кратные рёбра, поэтому будем считать их разрешёнными. Петли можно отбросить: они не помогают переходить между различными вершинами.

Для графа из одной вершины утверждение очевидно. Предположим, что оно уже доказано для всех графов с меньшим числом вершин.

Шаг 1. Найдём цикл. Возьмём любое ребро uv. Оно не является мостом, поэтому после его удаления между u и v остаётся путь. Вместе с ребром uv этот путь образует цикл C.

Шаг 2. Ориентируем цикл и стянем его. Направим все рёбра цикла C по кругу. Теперь из любой вершины C можно попасть в любую другую его вершину. Поэтому с точки зрения достижимости весь цикл ведёт себя как одна вершина. Стянем его в вершину c и обозначим полученный граф через G'.

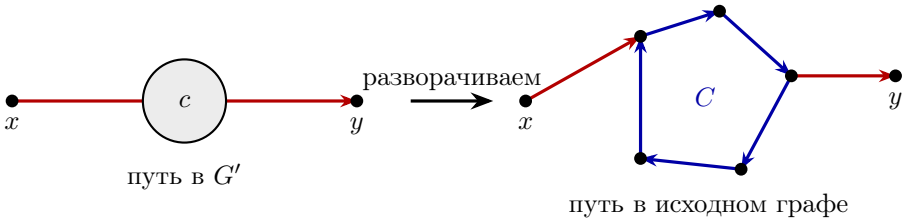


При стягивании число вершин уменьшается. Для применения индукции нужно проверить только одно: в G' по-прежнему нет мостов.

Предположим, что некоторое ребро e стало мостом в G'. Тогда после его удаления вершины G' распадаются на две непустые части, между которыми больше нет рёбер. Если одна из частей содержит c, заменим c всеми вершинами цикла C. Все рёбра цикла останутся внутри этой части, поэтому в исходном графе ребро e также будет единственным ребром между двумя частями. Тогда e было мостом и до стягивания — противоречие. Следовательно, в G' мостов нет.

Шаг 3. Применим индукцию. В графе G' меньше вершин, поэтому по предположению индукции его рёбра можно ориентировать так, чтобы из любой вершины можно было попасть в любую другую. Перенесём эту ориентацию на соответствующие рёбра исходного графа; рёбра цикла C уже ориентированы по кругу.

Остаётся понять, почему полученная ориентация сильна. Возьмём любые вершины x и y. В стянутом графе существует ориентированный путь из образа x в образ y. Если он не проходит через c, тот же путь есть и в исходном графе. Если же он входит в c через ребро, примыкавшее к одной вершине цикла, а выходит через ребро, примыкавшее к другой, то между этими вершинами пройдём по ориентированному циклу C.



То же рассуждение работает, если x или y лежит на самом цикле. Значит, из любой вершины можно попасть в любую другую, то есть полученная ориентация сильна.

Таким образом, граф допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда удаление любого его ребра оставляет граф связным. □