Тренировочная олимпиада. Четыре задачи.

Задача 1. Натуральные числа Ц, П, М удовлетворяют соотношению

$$\text{Ц} \cdot \text{П} + \text{П} \cdot \text{М} + \text{М} \cdot \text{Ц} = (\text{Ц} + \text{П} + \text{М}) \cdot \sqrt[3]{\text{Ц} \cdot \text{П} \cdot \text{М}}.$$

Докажите, что эти три числа в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию.

Задача 2. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что P лежит между B и Q. Лучи AP и AQ делят угол BAC на три равные части. Оказалось, что треугольник APQ является остроугольным. Обозначим через B_1, P_1, Q_1, C_1 проекции точек B, P, Q, C на прямые AP, AQ, AP, AQ соответственно. Докажите, что прямые B_1P_1 и C_1Q_1 пересекаются на прямой BC.

Задача 3. Назовём степень двойки *компактной*, если она представляется в виде суммы не более чем 10^{10} необязательно различных факториалов натуральных чисел. Конечно ли множество компактных степеней двойки?

Задача 4. Докажите, что в графе можно ориентировать рёбра так, чтобы из любой вершины можно было попасть в любую другую, тогда и только тогда, когда при удалении любого ребра в этом графе он остаётся связным.