Диагностическая работа

Задача 1. Прямоугольник 100×1000 разрезан на доминошки. Докажите, что найдётся другое такое разрезание этого прямоугольника на доминошки, что у этих двух разрезаний нет общих доминошек.

Решение. Разобьём прямоугольник 100×1000 на квадраты 2×2. Внутри каждого такого квадрата исходное замощение не может содержать одновременно горизонтальное и вертикальное домино, так как в квадрате 2×2 любое горизонтальное домино пересекается с любым вертикальным домино. Следовательно, можно построить замощение, в котором каждый квадрат 2×2 замощён двумя домино, причём ни одно из них не входит в исходное замощение, что и требовалось. □

Задача 2. Даны положительные числа a, b, c, для которых $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{bc}{a^3} + \frac{ca}{b^3} + \frac{ab}{c^3} \geqslant 3.$$

Решение. По неравенству о средних $1 = \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$, откуда следует, что $abc \leqslant 1$. Тогда по неравенству о средних

$$\frac{bc}{a^3} + \frac{ca}{b^3} + \frac{ab}{c^3} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geqslant 3.$$

□

Задача 3. Пусть в треугольнике ABC точка D — основание биссектрисы из угла A. Точки E и F — центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Оказалось, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на BC. Чему может равняться угол BAC?

Ответ: $120°$.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника AEF, а $\angle BAC = \alpha$. Поскольку углы BAD и CAD острые, точки E и F лежат в полуплоскости относительно прямой BC, содержащей точку A. По теореме о вписанном угле получаем

$$\angle BED = 2\angle BAD = \alpha = 2\angle DAC = \angle DFC.$$

Таким образом, равнобедренные треугольники BED и DFC подобны. Отсюда следует, что $\angle EDF = \alpha$, а прямая BC является внешней биссектрисой угла при вершине D треугольника DEF.

Точка O лежит на прямой BC и на серединном перпендикуляре к отрезку EF. Рассматривая эту конфигурацию относительно треугольника DEF, видим, что точка O лежит на внешней биссектрисе угла при вершине D и на серединном перпендикуляре

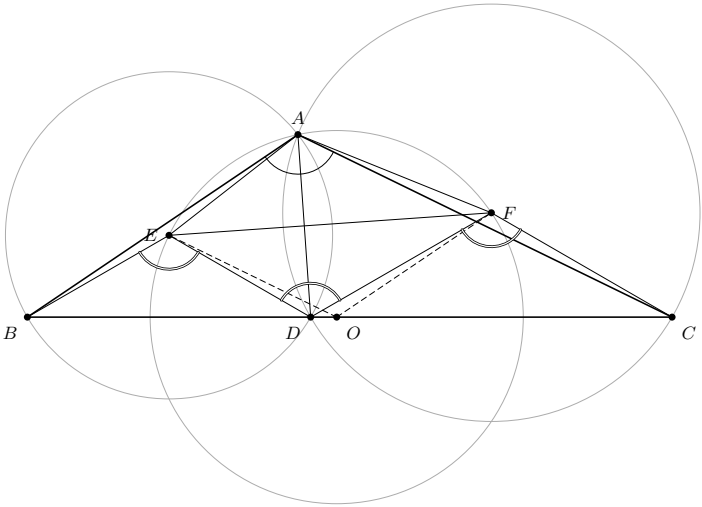


Рис. 1: к задаче 3.

к противоположной стороне EF. Следовательно, O является серединой дуги EDF, и потому $\angle EOF = \angle EDF = \alpha$.

Четырёхугольник $AEDF$ является дельтоидом, поэтому $\angle EAF = \alpha$. Кроме того, прямая EF разделяет точки A и O. Следовательно, по теореме о вписанном угле величина невыпуклого угла EOF в два раза больше величины выпуклого угла EAF. Поэтому $360^\circ - \alpha = 2\alpha$. Отсюда $3\alpha = 360^\circ$, то есть $\alpha = 120^\circ$. □

Задача 4. Миша выбирает набор M из 1075 различных натуральных чисел и считает количество k таких неупорядоченных пар (p, q) из различных элементов M, что их среднее арифметическое также лежит в M. Какое наибольшее значение k может получить Миша?

Ответ: $\left(\frac{1075-1}{2}\right)^2 = 288369$.

Решение. Расположим элементы множества M в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \cdots < x_{1075}$. Зафиксируем элемент x_i и оценим количество пар, среднее арифметическое которых равно x_i. Если $\frac{x_j+x_l}{2} = x_i$, то обязательно $j < i < l$. При этом каждому индексу $j < i$ может соответствовать не более одного индекса $l > i$, поскольку из равенства $x_j + x_l = 2x_i$ число x_l определяется однозначно. Аналогично каждый индекс $l > i$ может входить не более чем в одну такую пару. Поэтому число пар со средним арифметическим x_i не превосходит $\min\{i-1, 1075-i\}$.

Каждая подходящая пара имеет единственное среднее арифметическое, поэтому при суммировании по всем i ни одна пара не будет посчитана дважды. Поскольку $1075 =$

$2 \cdot 537 + 1$, получаем

$$\begin{aligned} k &\leqslant \sum_{i=1}^{1075} \min\{i-1, 1075-i\} = \\ &= 0 + 1 + \cdots + 536 + 537 + 536 + \cdots + 1 + 0 = \\ &= 2(1 + 2 + \cdots + 536) + 537 = \\ &= 536 \cdot 537 + 537 = \\ &= 537^2 = 288369. \end{aligned}$$

Пример. Возьмём $M = \{1, 2, \ldots, 1075\}$. Среднее арифметическое двух различных элементов этого множества лежит в M тогда и только тогда, когда эти элементы имеют одинаковую чётность. В M содержатся 538 нечётных и 537 чётных чисел, поэтому количество подходящих неупорядоченных пар равно

$$\binom{538}{2} + \binom{537}{2} = \frac{538 \cdot 537}{2} + \frac{537 \cdot 536}{2} = 537^2 = 288369.$$

Следовательно, полученная оценка достигается. □

Задача 5. Назовём степень двойки *компактной*, если она представляется в виде суммы не более чем 10^{10} необязательно различных факториалов натуральных чисел. Конечно ли множество компактных степеней двойки?

Ответ: да, конечно.

Решение. Докажем более сильное утверждение: для любых целых $m, n \geqslant 0$ уравнение $a_1! + \cdots + a_m! = 2^b - n$ имеет лишь конечное число решений $(a_1, \ldots, a_m, b)$ в целых числах, удовлетворяющих условию $1 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_m$.

Проведём индукцию по m. При $m = 0$ уравнение принимает вид $2^b = n$, поэтому для каждого n существует не более одного решения.

Пусть утверждение доказано для $m - 1$; докажем его для m. При фиксированном n покажем, что число возможных значений a_1 конечно.

Если $n = 0$, то $a_1 \leqslant 2$: в противном случае все факториалы в левой части делились бы на 3, а степень двойки на 3 не делится.

Пусть теперь $n > 0$. Поскольку левая часть положительна, имеем $2^b > n$, откуда $b > v_2(n)$, где v_2 обозначает степень вхождения двойки в число n. Поэтому

$$v_2(n) = v_2(2^b - n) = v_2(a_1! + \cdots + a_m!) \geqslant v_2(a_1!).$$

Но $v_2(a_1!) \to \infty$ при $a_1 \to \infty$, так что возможных значений a_1 лишь конечное число.

Для каждого из этих значений уравнение переписывается в виде $a_2! + \cdots + a_m! = 2^b - (n + a_1!)$. По предположению индукции оно имеет лишь конечное число решений. Поскольку и возможных значений a_1 конечное число, индукционный переход доказан.

Теперь для каждого $m \leqslant 10^{10}$ уравнение $a_1! + \cdots + a_m! = 2^b$ имеет лишь конечное число решений. Значений m тоже конечное число, поэтому множество компактных степеней двойки конечно. □

Задача 6. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, AD — высота. Прямые BC и AO пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через E перпендикулярно AO, пересекает прямые AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая AD повторно пересекает описанную окружность треугольника AKL в точке X. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, AKL и DEX, имеют общую точку.

Решение. Будем обозначать описанную окружность треугольника XYZ через (XYZ). Пусть прямая AO повторно пересекает окружность (ABC) в точке Y. Так как $\angle AKE = \angle ACB$, четырёхугольник $KBLC$ вписанный. По теореме о степени точки E получаем $AE \cdot EY = BE \cdot EC = KE \cdot EL$. Следовательно, четырёхугольник $ALYK$ также вписанный.

Далее, $\angle AXK = \angle ALK = \angle ABC$, поэтому четырёхугольник $BDXK$ вписанный. Аналогично, $\angle AYK = \angle ALK = \angle ABC$, поэтому четырёхугольник $BEYK$ вписанный.

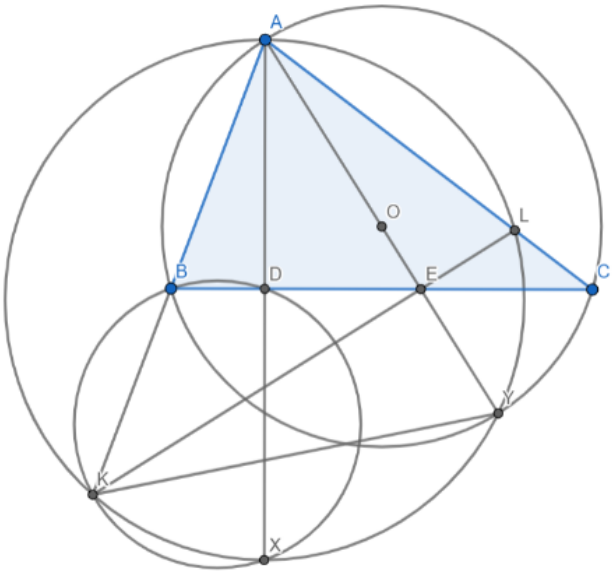


Рис. 2: к задаче 6.

Применяя теорему о степени точки A к двум последним окружностям, получаем

$$AE \cdot AY = AB \cdot AK = AD \cdot AX.$$

Следовательно, точки D, E, Y, X лежат на одной окружности. Таким образом, окружности (ABC), (AKL) и (DEX) имеют общую точку Y. □