Диагностическая работа

Задача 1. Прямоугольник 100×1000 разрезан на доминошки. Докажите, что найдётся другое такое разрезание этого прямоугольника на доминошки, что у этих двух разрезаний нет общих доминошек.

Задача 2. Даны положительные числа a, b, c, для которых $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{bc}{a^3} + \frac{ca}{b^3} + \frac{ab}{c^3} \geqslant 3.$$

Задача 3. Пусть в треугольнике ABC точка D — основание биссектрисы из угла A. Точки E и F — центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD соответственно. Оказалось, что центр описанной окружности треугольника AEF лежит на BC. Чему может равняться угол BAC?

Задача 4. Миша выбирает набор M из 1075 различных натуральных чисел и считает количество k таких неупорядоченных пар (p, q) из различных элементов M, что их среднее арифметическое также лежит в M. Какое наибольшее значение k может получить Миша?

Задача 5. Назовём степень двойки *компактной*, если она представляется в виде суммы не более чем 10^{10} необязательно различных факториалов натуральных чисел. Конечно ли множество компактных степеней двойки?

Задача 6. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, AD — высота. Прямые BC и AO пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через E перпендикулярно AO, пересекает прямые AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая AD повторно пересекает описанную окружность треугольника AKL в точке X. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, AKL и DEX, имеют общую точку.