Соосные окружности

Для окружности ω с центром (a, b) и радиусом R положим $f_\omega(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2$. Тогда $f_\omega(x_0, y_0)$ равно степени точки (x_0, y_0) относительно ω.

Определение. Три попарно различные окружности *соосны*, если они имеют общую радикальную ось.

Пучок, заданный двумя окружностями с различными центрами, состоит из них самих и всех окружностей, соосных с ними. Для пересекающихся окружностей это все окружности через их общие точки.

Теорема. Для окружности $\gamma \neq \omega_1, \omega_2$ равносильны условия:

- γ принадлежит пучку ω_1, ω_2;
- существуют $\alpha + \beta = 1$, для которых тождественно $f_\gamma = \alpha f_{\omega_1} + \beta f_{\omega_2}$;
- существует константа $k \neq 1$, для которой $f_{\omega_1}(X)/f_{\omega_2}(X) = k$ при всех $X \in \gamma \setminus \omega_2$.

1. Пусть радиусы двух окружностей различны, а центры не совпадают. Докажите, что окружность, построенная на отрезке между центрами их внутренней и внешней гомотетий как на диаметре, принадлежит пучку этих окружностей.

2. Окружность ω_1 лежит внутри окружности ω_2 и касается её в точке T. На ω_2 выбраны точки $A, B \neq T$. Длины касательных из A и B к ω_1 равны t_a и t_b. Докажите, что $TA/TB = t_a/t_b$.

3. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в H. Точка P такова, что $\angle BPC = 90^\circ$, а A и P лежат по разные стороны от BC. Из P проведены касательные к $(A_1B_1C_1)$ и (AB_1C_1). Найдите отношение длин этих касательных.

4. Две окружности с центрами O_1, O_2 пересекаются в A, B. Прямая через A вторично пересекает их в C, D, а M — середина CD.

(а) Докажите, что все такие точки M лежат на одной окружности через A, B, и найдите её центр.

(б) Пусть $M \neq B$. Прямая BM вторично пересекает исходные окружности в E, F. Докажите, что M — середина EF.

5. В тупоугольном треугольнике ABC точки H и G — ортоцентр и точка пересечения медиан, а D, E, F — середины сторон. Докажите, что окружности (ABC), (DEF) и окружность с диаметром HG имеют две общие точки.

6. Две секущие пересекают окружность ω_1 в A_1, B_1 и C_1, D_1, а окружность ω_2 — в A_2, B_2 и C_2, D_2 соответственно. Докажите, что точки

$$A_1C_1 \cap B_2D_2, \quad A_1C_1 \cap A_2C_2, \quad A_2C_2 \cap B_1D_1, \quad B_2D_2 \cap B_1D_1$$

лежат на одной окружности, соосной с ω_1, ω_2.

7. Четырёхугольник $APBQ$ вписан в окружность ω, причём углы при P, Q прямые и $AP = AQ < BP$. Точка X движется внутри отрезка PQ. Прямая AX вторично пересекает ω в S. На дуге AQB выбирают точку T, для которой $XT \perp AX$. Докажите, что середина ST лежит на фиксированной окружности.