Линейность и степень точки

Для окружности ω с центром (a,b) и радиусом R положим $f_\omega(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2-R^2$. Тогда $f_\omega(x_0,y_0)$ равно степени точки (x_0,y_0) относительно ω.

Мысль 1. Если $\lambda_1+\dots+\lambda_n=0$, то $F=\lambda_1 f_{\omega_1}+\dots+\lambda_n f_{\omega_n}$ линейна.

В частности, для различных ω_1 и ω_2 функция $F=f_{\omega_1}-f_{\omega_2}$ линейна, а прямая $F=0$ это радикальная ось окружностей ω_1 и ω_2.

Мысль 2. Если $X=(1-t)A+tB$, то

$$f_\omega(X)=(1-t)f_\omega(A)+tf_\omega(B)-t(1-t)AB^2.$$

В частности, для середины M отрезка AB

$$f_\omega(M)=\frac{f_\omega(A)+f_\omega(B)}{2}-\frac{AB^2}{4}.$$

1. Докажите мысль 2.

2. Докажите, что для окружности ω с диаметром AB выполнено $f_\omega(X)=\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XB}$.

3. Даны две окружности и треугольник. Оказалось, что степень каждой вершины относительно первой окружности равна её степени относительно второй. Докажите, что окружности совпадают.

4. Используя предыдущую задачу, передокажите такую.

Внутри сторон BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно пары различных точек A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Известно, что четырехугольники $A_1A_2B_1B_2$, $A_1A_2C_1C_2$, $B_1B_2C_1C_2$ вписанные. Докажите, что все шесть точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности

5. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AP=AQ$. Точки S и R лежат на стороне BC в порядке B,S,R,C, причём $\angle BPS=\angle PRS$ и $\angle CQR=\angle QSR$. Докажите, что P,Q,R,S лежат на одной окружности.

6. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, причём $AP\neq CP$ и $BP\neq DP$. На отрезках AC и BD отмечены точки K и L соответственно так, что $CK=AP$ и $DL=BP$. Докажите, что радикальная ось окружностей (ALC) и (BKD) проходит через середину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

7. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбирают внутреннюю точку D. Окружности (ABD) и (ACD) вторично пересекают прямые AC и AB в точках $E\neq A$ и $F\neq A$ соответственно. Докажите, что все окружности (AEF) проходят через фиксированную точку, отличную от A и лежащую на медиане из вершины A.

8. Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается AB и AC в точках K и L. Высота AH пересекает биссектрисы углов B и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина AH лежит на радикальной оси окружностей (KPB) и (LQC).

9. Точка A лежит на окружности ω.

(а) Прямая AX вторично пересекает ω в точке $Y\neq A$. Докажите, что функция $h(X)=\overline{AX}\cdot\overline{AY}$ линейна.

(б) В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, а N — середина отрезка AM. Окружность ω, проходящая через N и касающаяся прямой AC в точке A, вторично пересекает отрезок AB во внутренней точке P. Докажите, что прямая AM касается описанной окружности треугольника BPM.

10. Точки P,Q,R лежат внутри сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно. Окружности (AQR), (BRP), (CPQ) вторично пересекают отрезок AP в точках X,Y,Z соответственно (все пять точек A,P,X,Y,Z различны). Докажите, что

$$\frac{YX}{XZ}=\frac{BP}{PC}.$$

11. В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина AC. Окружность ω, проходящая через B и M, вторично пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Четырёхугольник $BPTQ$ — параллелограмм, причём T лежит на описанной окружности треугольника ABC. Найдите все возможные значения отношения BT/BM.

12. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность ω. Через A проведена прямая $\ell_a\parallel BC$, через B — $\ell_b\parallel CD$, через C — $\ell_c\parallel DA$, через D — $\ell_d\parallel AB$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на этих четырёх прямых именно в таком порядке, вписан в окружность γ. Окружности ω и γ пересекаются в точках E и F. Докажите, что прямые AC, BD и EF пересекаются в одной точке.

13. Точка P лежит на вписанной окружности треугольника ABC. Из отрезков касательных, проведённых из P к трём вневписанным окружностям, можно составить прямоугольный треугольник. Докажите, что P лежит на одной из средних линий треугольника ABC.

14. Четырёхугольник $ABCD$ не является вписанным; никакие три его вершины не лежат на одной прямой. Докажите, что

$$\frac{1}{f_{(BCD)}(A)}+\frac{1}{f_{(ACD)}(B)}+\frac{1}{f_{(ABD)}(C)}+\frac{1}{f_{(ABC)}(D)}=0.$$

15. В треугольнике ABC точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей. Точки D,E,F лежат внутри сторон BC, CA, AB соответственно, причём

$$BD+BF=CA,\qquad CD+CE=AB.$$

Окружности (BFD) и (CDE) вторично пересекаются в точке P. Докажите, что $OP=OI$.