

Линейные функции

Определение. Функцию $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *линейной*, если в декартовой системе координат она имеет вид $f(x, y) = ax + by + c$.

Ориентированное расстояние. Для каждой прямой ℓ выберем положительную полуплоскость. Через $\rho(X, \ell)$ обозначим расстояние от X до ℓ со знаком «+» в этой полуплоскости и со знаком «−» в другой; на самой прямой положим $\rho(X, \ell) = 0$. Если не оговорено иное, для сторон выпуклого многоугольника положительной считаем полуплоскость, содержащую его внутренность. Под расстоянием до стороны всюду понимается расстояние до *прямой*, содержащей эту сторону.

Примеры. Константа; ориентированное расстояние $\rho(X, \ell)$; ориентированная площадь $S(X, AB) = \frac{1}{2} AB \cdot \rho(X, AB)$ при фиксированном основании AB ; разность $XA^2 - XB^2$ при фиксированных A и B .

Линейные комбинации линейных функций также линейны.

Если $\vec{OC} = \alpha \vec{OA} + (1 - \alpha) \vec{OB}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, то $f(C) = \alpha f(A) + (1 - \alpha) f(B)$. Непостоянная линейная функция имеет параллельные прямые уровня: для любого $d \in \mathbb{R}$ множество $\{X : f(X) = d\}$ является прямой. Если две линейные функции совпадают в трёх неколлинеарных точках, то они совпадают всюду.

- (а) Пусть M — середина AB , а G — точка пересечения медиан треугольника ABC . Выразите $f(M)$ и $f(G)$ через $f(A)$, $f(B)$ и $f(C)$.

(б) Параллелограмм $ABCD$ лежит по одну сторону от прямой ℓ . Расстояния от A , B , C до ℓ равны u , v , w соответственно. Найдите расстояние от D до ℓ .
- В треугольнике ABC проведены внутренние биссектрисы BB_1 и CC_1 , где $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$.

(а) Докажите, что для любой точки отрезка B_1C_1 расстояние до BC равно сумме расстояний до AB и AC .

(б) Если внешняя биссектриса угла A пересекает прямую BC в точке A_1 , докажите, что A_1 , B_1 , C_1 коллинеарны.
- (а) Внутри треугольника нашлись три неколлинеарные точки, суммы расстояний от которых до сторон одинаковы. Докажите, что треугольник равносторонний.

(б) Внутри выпуклого четырёхугольника нашлись три такие точки. Докажите, что четырёхугольник — параллелограмм.
- В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что для любой точки P плоскости одна из площадей треугольников PAA_1 , PBB_1 , PCC_1 равна сумме двух других.
- Точки пересечения медиан треугольников $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ и $C_1C_2C_3$ лежат на одной прямой. Докажите, что 27 треугольников $A_iB_jC_k$, где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, можно разбить на две группы так, чтобы суммы площадей треугольников в этих группах были равны.
- В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . С центрами в B и C построены окружности радиусов $BB_1/2$ и $CC_1/2$. Прямая ℓ — их общая внешняя касательная, не пересекающая треугольник ABC . Докажите, что центр

вписанной окружности треугольника, образованного прямыми AB , AC и ℓ , лежит на отрезке BC .

- (а) **Прямая Гаусса.** Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон. Пусть $E = AB \cap CD$ и $F = AD \cap BC$. Докажите, что середины AC , BD и EF лежат на одной прямой.

(б) **Теорема Ньютона.** Если в этот четырёхугольник вписана окружность, то её центр лежит на прямой Гаусса.

Здесь и ниже ABC — неравносторонний треугольник, I и O — центры его вписанной и описанной окружностей, r и R — их радиусы. Положим

$$F(X) = \rho(X, AB) + \rho(X, BC) + \rho(X, CA).$$

- Пусть ℓ_a , ℓ_b , ℓ_c — серединные перпендикуляры к BC , CA , AB соответственно. Для этих трёх прямых положительными выберем полуплоскости, содержащие C , A , B соответственно, и положим

$$H(X) = \rho(X, \ell_a) + \rho(X, \ell_b) + \rho(X, \ell_c).$$

- (а) Докажите, что H непостоянна и её множество нулей — прямая OI .

(б) Поверните все три ориентированные прямые вокруг O на 90° . Докажите, что сумма ориентированных расстояний до полученных прямых отличается от F или от $-F$ на константу. Выведите, что все прямые уровня F перпендикулярны OI .
- (а) Докажите, что $BC = (AB + AC)/2$ тогда и только тогда, когда внутренняя биссектриса угла A перпендикулярна OI .

(б) Пусть $BC < AB$ и $BC < AC$. На сторонах AB и AC выбраны точки X и Y так, что $BX = CY = BC$. Докажите, что $XY \perp OI$.
- (а) Докажите, что точки пересечения внешних биссектрис с прямыми противоположных сторон лежат на одной прямой, перпендикулярной OI .

(б) Пусть I_a — центр вневписанной окружности, лежащий напротив A . Докажите, что прямые уровня функции

$$F_a(X) = \rho(X, AB) + \rho(X, AC) - \rho(X, BC)$$

перпендикулярны OI_a .

- (в) Пусть внутренние биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекают стороны AC и AB соответственно. Докажите, что $B_1C_1 \perp OI_a$.
- Прямая s проходит через I перпендикулярно IO . Прямая ℓ , симметричная BC относительно s , пересекает отрезки AB и AC в точках K и L , отличных от A . Докажите, что центр описанной окружности треугольника AKL лежит на прямой IO .