

Ещё одно преобразование

1. Дан четырёхугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , прямые AD и BC пересекаются в точке F , а M — точка Микеля четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $MA \cdot MC = MB \cdot MD = ME \cdot MF$ и углы AMC , BMD , EMF имеют общую биссектрису.

Из предыдущей задачи следует, что существует «инверсия + симметрия» с центром в точке M , меняющая местами точки A и C , B и D , E и F . Это преобразование называется *сопряжением Клоусона* относительно четырёхугольника $ABCD$.

2. (а) Точки P и Q сопряжены по Клоусону относительно четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle APB = \angle ADQ + \angle QCB$.
(б) Докажите, что если для двух точек внутри четырёхугольника выполняются два из четырёх равенств, аналогичных сформулированному в предыдущем пункте, с общей вершиной, то они сопряжены по Клоусону.
(в) Докажите, что если точки P и Q изогонально сопряжены относительно четырёхугольника $ABCD$, то P и Q сопряжены по Клоусону относительно $ABCD$.
3. (а) Докажите, что во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ центр описанной окружности O сопряжён по Клоусону точке пересечения диагоналей P .
(б) Выведите отсюда, что точка Микеля вписанного четырёхугольника — это пересечение прямой OP с прямой, соединяющей точки пересечения пар противоположных сторон.
4. (а) **Теорема Клиффорда.** Дан четырёхугольник $ABCD$. Отображение f сопоставляет каждой точке X плоскости вторую точку $f(X)$ пересечения окружностей (ABX) и (CDX) . Отображение g сопоставляет каждой точке X плоскости вторую точку $g(X)$ пересечения окружностей (BCX) и (DAX) . Докажите, что $f \circ g = g \circ f$.
(б) Докажите, что преобразование $f \circ g$ — это сопряжение Клоусона.
5. Точки P_1 и Q_1 , P_2 и Q_2 , P_3 и Q_3 сопряжены по Клоусону относительно четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что P_3 и Q_3 сопряжены по Клоусону относительно $P_1P_2Q_1Q_2$.
6. (а) Точки P и Q изогонально сопряжены относительно четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой Гаусса $ABCD$.
Указание: введите комплексные координаты так, чтобы координаты вершин были равны $a, \frac{1}{a}, b, \frac{1}{b}$, а координаты точек P и Q — $p, \frac{1}{p}$.
(б) Докажите, что для каждой точки X на прямой Гаусса существует единственная пара изогонально сопряжённых точек такая, что X — середина соединяющего их отрезка.
(в) Точки P_1 и Q_1 , P_2 и Q_2 , P_3 и Q_3 изогонально сопряжены относительно четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что P_3 и Q_3 изогонально сопряжены относительно $P_1P_2Q_1Q_2$.

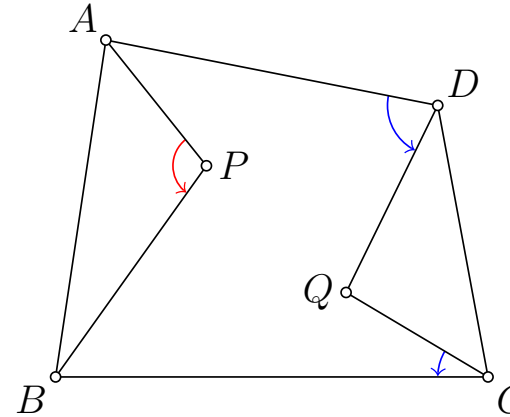


Рис. 1: к задаче 2а.

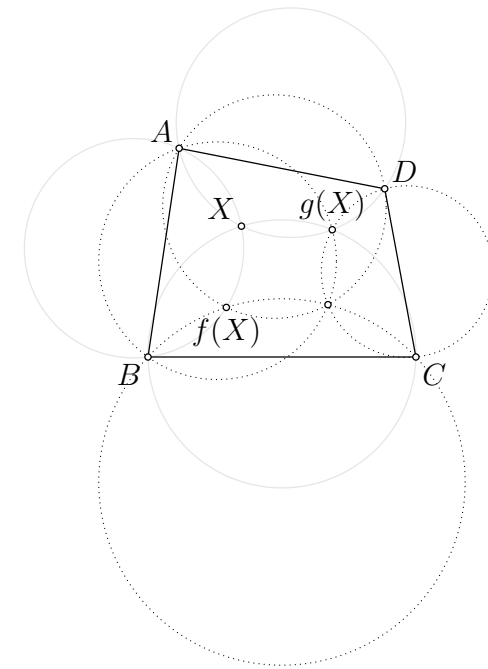


Рис. 2: к задаче 4.

Задачи.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . Диагонали AC и BD пересекаются в точке E , а прямые AB и CD — в точке F . Прямая BC пересекает окружность (ADF) в точках X и Y . Докажите, что $\angle OXE = \angle OYE$.
8. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка X . Центры окружностей (ABX) , (BCX) , (CDX) , (DAX) обозначим через O_1, O_2, O_3, O_4 соответственно. Докажите, что угол между прямыми O_1O_3 и O_2O_4 не зависит от выбора точки X .
9. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Серединный перпендикуляр к отрезку AH пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно, P — вторая точка пересечения окружностей (BDH) и (CEH) , лежащая внутри треугольника ABC , но вне треугольника BHC . Докажите, что длина отрезка AP равна радиусу окружности (ABC) .
10. Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность с центром в точке O , пересекаются в точке P . Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке X , биссектрисы углов B и C — в точке Y , C и A — в точке Z , A и D — в точке W . Докажите, что если точки X, Y, Z, W, O лежат на одной окружности, то на этой же окружности лежит и точка P .