

Изогональное сопряжение в четырёхугольнике

Напоминание. Точки P и Q называются *изогонально сопряжёнными* относительно многоугольника $A_1A_2 \dots A_k$ (считаем, что $A_{k+1} = A_1$), если для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ выполнено равенство

$$\angle(A_iA_{i+1}, PA_{i+1}) = \angle(QA_{i+1}, A_{i+1}A_{i+2}).$$

Теорема 1. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка P . Тогда следующие условия эквивалентны:

- $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$;
- проекции P на прямые AB, BC, CD, DA лежат на одной окружности;
- существует точка, изогонально сопряжённая P относительно $ABCD$.

1. Докажите равносильность **(а)** первых двух условий; **(б)** последних двух условий. **(в)** Как правильно переформулировать первый критерий существования изогонально сопряжённой точки, если P не лежит внутри $ABCD$?
2. Пусть в остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, а H — ортоцентр. Докажите, что если E и F — точки пересечения серединного перпендикуляра к BH с боковыми сторонами, то OB — биссектриса угла EOF .
3. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I . Окружность, проходящая через B и касающаяся AI в точке I , повторно пересекает AB в точке P . Окружность, проходящая через C и касающаяся AI в точке I , повторно пересекает AC в точке Q . Докажите, что PQ касается ω .
4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через I_A, I_B, I_C и I_D центры вписанных окружностей треугольников DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_AA + \angle CI_AI_D = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BI_BA + \angle CI_CI_D = 180^\circ$.
5. Внутри окружности ω отмечена точка K . Рассматриваются хорды AB окружности ω , для которых $\angle AKB = 90^\circ$. Докажите, что проекции точки K на всевозможные хорды AB лежат на одной окружности.
6. Для точки E , лежащей внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$, выполнены равенства $\angle DAE = \angle CAB$ и $\angle ADE = \angle CDB$. Докажите, что если перпендикуляр из E на AD проходит через точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, то $\angle AEB = \angle CED$.

Введём следующее обозначение

$$\mathcal{C}(ABCD) := \{P: \text{существует точка, изогонально сопряжённая } P \text{ относительно } ABCD\}.$$

Теорема 2.

Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{C}(ABCD)$, а отображение $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ переводит произвольную точку данного ГМТ в изогонально сопряжённую ей относительно четырёхугольника $ABCD$.

Пусть $B' = f(A'), D' = f(C')$. Тогда $f_{ABCD} = f_{A'B'C'D'}$. Иными словами, $\mathcal{C}(ABCD) = \mathcal{C}(A'B'C'D')$, а любые две точки, изогонально сопряжённые относительно $ABCD$, также изогонально сопряжены относительно четырёхугольника $A'B'C'D'$, и наоборот.

Фактически, теорема 2 утверждает, что изогональное сопряжение относительно четырёхугольника однозначно задаётся двумя парами точек, которые оно переставляет.

Доказательство оставим до следующего занятия, а пока что посмотрим, как эта теорема может работать на практике.

7. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Прямые AB и CD пересекаются в точке E , а прямые AD и BC пересекаются в точке F . Точка X внутри $ABCD$ такова, что $\angle AXE = \angle CXF$. Докажите, что $\angle AXB + \angle CXD = 180^\circ$.
8. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке I . Точки P и Q таковы, что в четырёхугольник $APCQ$ можно вписать окружность с центром в точке I . Докажите, что в четырёхугольник $BPDQ$ можно вписать окружность с центром в точке I .
9. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике существует не более одной пары изогонально сопряжённых точек.
10. В треугольнике ABC изогонально сопряжены точки P_1 и P_2, Q_1 и Q_2 . Докажите, что точки, изогонально сопряжённые A, B и C соответственно относительно четырёхугольника $P_1Q_1P_2Q_2$, существуют и лежат на одной прямой.