Chip firing game

На занятие математического кружка пришли n детей. Граф дружб между ними связен и содержит m рёбер. У детей есть в общей сложности N конфет. Каждую минуту один из детей, у которого достаточно конфет, чтобы дать каждому своему другу по одной, делает это.

1. Докажите, что если $N \geq 2m - n + 1$ конфета, то процесс не закончится никогда.

2. Докажите, что если $N \leq 2m - n$ конфет, то им можно изначально раздать конфеты так, чтобы процесс был конечен.

3. Пусть процесс раздачи продолжается бесконечно. Докажите, что у каждого ребёнка рано или поздно побывает конфета.

4. Докажите, что если среди детей есть жадина, который никогда не раздаёт конфеты, а только съедает полученные, то процесс раздачи рано или поздно закончится.

5. Докажите, что если $N = m - 1$, то процесс раздачи конфет рано или поздно закончится.
Подсказка. Почему если процесс бесконечен, то можно каждому ребру сопоставить свою (уникальную) конфету?

6. **(а) (Diamond лемма)** Дан бесконечный ориентированный граф без ориентированных циклов и бесконечных путей. Известно, что если из вершины a ведут ребра в вершины b и c, то существует вершина d, достижимая и из b, и из c. Тогда для любой вершины графа найдется единственная достижимая вершина с нулевой исходящей степенью. Докажите это.

(б) Докажите, что если при данной изначальной раздаче конфет процесс не может продолжаться бесконечно, то конечное состояние (количества конфет у детей) не зависит от порядка действий.

(в) Докажите, что если хотя бы при одном порядке раздач процесс заканчивается, то количество раздач, совершённых каждым ребёнком, не зависит от порядка раздач. В частности, тогда любой процесс раздачи заканчивается.

7. Докажите, что если $N = m$, то детям можно изначально раздать конфеты так, чтобы процесс раздачи продолжался бесконечно долго.

8. **(а)** Петя и Вася — друзья. Докажите, что в любой момент времени количества раздач, совершённых Петей и Васей, отличаются не более чем на N.

(б) В какой-то момент процесс раздачи конфет закончился. Докажите, что найдётся ребёнок, который ни разу не раздавал конфеты.

(в) Пусть процесс раздачи конфет закончился. Докажите, что всего было не более $2n^4$ раздач.