Линейное движение точек

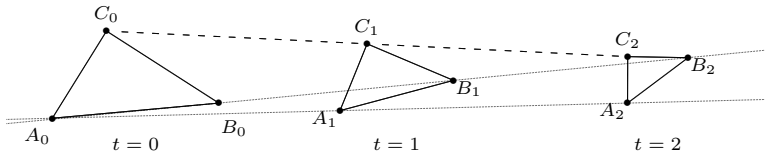
Определение. Фигура (точка, прямая) движется *линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t она смещается на вектор $t\vec{v}$.

1. Верно ли, что линейно движется
(а) середина отрезка, концы которого движутся линейно;
(б) прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку;
(в) прямая, две различные точки которой движутся линейно;
(г) точка пересечения двух непараллельных прямых, движущихся линейно?

2. **(а)** Какого наименьшего количества различных положений достаточно, чтобы гарантированно утверждать, что линейно движущаяся точка всегда лежит на данной фиксированной прямой?
(б) Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, AC в точках C_1, B_1. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P, Q соответственно, причём $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина PQ лежит на прямой B_1C_1.

3. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что $BP = AQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника CPQ лежит на диагонали BD.

4. Точки A и B движутся линейно. На отрезке AB строится треугольник ABC, подобный фиксированному треугольнику $A_0B_0C_0$ и одинаково с ним ориентированный. Докажите, что точка C движется линейно.



5. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На луче AO выбрана точка P. Описанные окружности треугольников APB и APC вторично пересекают прямые AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середина B_1C_1 равноудалена от B и C.

6. В остроугольном треугольнике ABC с ортоцентром H высоты из B и C имеют основания M и N. Внутри стороны BC взята точка W. На окружностях (BWN) и (CWM) выбраны точки X и Y так, что WX и WY — диаметры. Докажите, что X, Y, H лежат на одной прямой.

Теорема. Если три линейно движущиеся точки коллинеарны в три различные момента времени, то они коллинеарны всегда.

7. На плоскости проведено четыре прямых общего положения.
(а) Прямая Гаусса. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся (и так для трёх разбиений прямых на пары), лежат на одной прямой.
(б) Прямая Обера. Докажите, что ортоцентры четырёх треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения, лежат на одной прямой.
(в) Докажите, что прямая Обера перпендикулярна прямой Гаусса.
(г) Докажите, что если четырёхугольник $ABCD$ вписанный, то прямая Обера четырёх прямых, содержащих его стороны, проходит через точку пересечения диагоналей.