Многочлены и непрерывность

1. Многочлен $P(x)$ таков, что уравнение $P(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ также не имеет корней.

2. Андрей выбрал два вещественных числа a и b и написал два уравнения: $x^4 - 2b^3x + a^4 = 0$ и $x^4 - 2a^3x + b^4 = 0$. Докажите, что хотя бы одно из этих уравнений имеет вещественный корень.

3. **(а)** Существуют ли такие три многочлена f_1, f_2, f_3 что у каждого из них и у их суммы $f_1 + f_2 + f_3$ имеется хотя бы по одному корню, а у трех сумм $f_1 + f_2, f_2 + f_3, f_3 + f_1$ корней нет?
(б) Существуют ли такие четыре многочлена, что сумма любых трех из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух не имеет корней?

4. Многочлены F и G таковы, что $F(F(x)) > F(G(x)) > G(G(x))$ для всех вещественных x. Докажите, что $F(x) > G(x)$ для всех вещественных x.

5. Пусть $f(x) = x^3 - x, g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных a и b, сумма которых не равна 0, многочлен $af(x) + bg(x)$ имеет три различных действительных корня.

6. Для любых попарно различных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите, что многочлен $(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^2 + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

7. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют хотя бы по одному действительному корню и для всех действительных x выполняется:

$$P(1 + x + (Q(x))^2) = Q(1 + x + (P(x))^2).$$

Докажите, что $P(x) = Q(x)$.

8. Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.

9. Многочлены P и Q таковы, что для каждого $a \in \mathbb{R}$ числа $P(a)$ и $Q(a)$ или оба целые, или оба не целые. Докажите, что найдётся такое целое число c, что либо $P(x) - Q(x) = c$, либо $P(x) + Q(x) = c$.

10. Докажите, что множество решений неравенства $\Sigma_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$ есть объединение непересекающихся промежутков, суммарная длина которых равна 1988.