Асимптотики

1. **(а)** Каких натуральных чисел, не превосходящих 10^{30}, больше: точных квадратов или представимых в виде суммы точного куба и шестой степени?

(б) Верно ли, что все достаточно большие натуральные числа можно представить в виде суммы точного квадрата и точного куба?

(в) Докажите, что при некотором натуральном N уравнение $x^3+y^3+z^3+t^3 = N$ имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.

2. Докажите, что для любого натурального числа n существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы n слагаемых, каждое из которых является n-й степенью натурального числа.

3. Существует ли квадратный трёхчлен, все значения которого в натуральных точках — степени двойки?

4. Пусть $S(k)$ — сумма цифр числа k. Докажите, что найдется бесконечно много n таких, что **(а)** $S(3^{n+1}) \leqslant S(3^n)$; **(б)** $S(2^{n+1}) < S(2^n)$.

5. Верно ли, что из любого числа можно получить квадрат, добавляя к его десятичной записи не более 10000 цифр? Цифры можно вписывать в любые места.

6. Докажите, что для некоторого n для любого натурального $k > n$ найдётся натуральное число, кратное k, не превосходящее k^4, в десятичной записи которого используется не более 4 различных цифр.

7. Все значения приведенного целочисленного многочлена в целых точках — точные квадраты. Докажите, что сам многочлен представим как квадрат некоторого многочлена.

8. Докажите, что из всех чисел вида $a^b (a, b \in \mathbb{N}; b \geqslant 2)$ невозможно выделить непостоянную бесконечную арифметическую прогрессию.