Аффинные преобразования

Определение. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно взаимно однозначно (биективно), непрерывно и образом любой прямой является прямая.

1. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.

2. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, где A', B', C', D' — образы точек A, B, C, D соответственно при аффинном преобразовании.

В качестве следствия получаем, что аффинное преобразование корректно определено на множестве всех векторов плоскости.

3. (*Линейность*) Докажите, что **(а)** $(u+v)' = u'+v'$; **(б)** $(q\cdot u)' = q\cdot u'$ для любого $q \in \mathbb{Q}$; **(в)** $(\lambda \cdot u)' = \lambda \cdot u'$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ (в последнем пункте используйте непрерывность).

Следствие: аффинное преобразование на каждой прямой сохраняет отношения отрезков.

4. *Репе́ром* называется набор из точки и двух неколлинеарных векторов. На плоскости даны два репера. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее один репер в другой.

Эта задача вместе со свойством линейности позволяет дать следующее эквивалентное определение аффинного преобразования: преобразование f называется *аффинным*, если на плоскости существуют две декартовы, необязательно прямоугольные системы координат такие, что координаты произвольной точки A в первой системе совпадают с координатами точки $f(A)$ во второй системе.

5. (*Координатное описание аффинных преобразований*) На плоскости определена декартова не обязательно прямоугольная система координат. Докажите, что класс преобразований, заданных формулами вида

$$x' = ax + by + x_0, \qquad y' = cx + dy + y_0,$$

где $ad - bc \neq 0$, совпадает с классом аффинных преобразований.

6. **(а)** Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения площадей двух треугольников, у которых есть пара параллельных сторон. **(б)** Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения площадей любых двух треугольников. **(в)** Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения площадей любых двух многоугольников.

Теорема. Любое взаимно однозначное отображение плоскости в себя, сохраняющее коллинеарность любых трёх коллинеарных точек, на самом деле аффинно.
В определении аффинного преобразования можно не требовать непрерывность!

Задачи

7. На сторонах AB, AC, BC треугольника ABC выбраны точки C_1, B_1, A_1 соответственно так, что

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

Докажите, что совпадают точки пересечения медиан треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и треугольника, полученного в пересечении прямых AA_1, BB_1, CC_1.

8. В трапеции $ABCD$ на диагоналях AC и BD отметили такие точки P и Q соответственно, что $BP \parallel CD$ и $CQ \parallel AB$. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

9. Внутри треугольника ABC выбрана точка P. Прямые, проходящие через P параллельно AB, BC, CA, пересекают стороны BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что

$$\frac{PA_1}{AB} + \frac{PB_1}{BC} + \frac{PC_1}{CA} = 1.$$

10. На сторонах AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, L и M соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Через точки B, C, D проведены прямые b, c, d, параллельные прямым KL, KM, ML соответственно. Докажите, что прямые b, c, d проходят через одну точку.

11. Докажите, что если в пятиугольнике четыре из диагоналей параллельны противоположным сторонам, то и пятая диагональ параллельна противоположной стороне.

12. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Известно, что

$$A_1B_2 \parallel AB, \qquad B_1C_2 \parallel BC, \qquad C_1A_2 \parallel CA.$$

Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равновелики.

13. Докажите, что две изотомические прямые треугольника не могут пересекаться внутри его серединного треугольника.
(*Изотомическими прямыми* треугольника называются две прямые, точки пересечения которых с прямыми, содержащими стороны треугольника, симметричны относительно середин соответствующих сторон треугольника.)