Разнобой по геометрии

1. Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle PBC = \angle PAB$ и $\angle PCB = \angle PAC$. Докажите, что окружности девяти точек треугольников ABP и ACP касаются.

2. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC (с прямым углом C) касается сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на высоте треугольника ABC, проведённой из вершины C.

3. На плоскости даны две пересекающиеся окружности. Точка A — одна из двух точек пересечения. В каждой окружности проведён диаметр, параллельный касательной в точке A к другой окружности, причём эти диаметры не пересекаются. Докажите, что концы этих диаметров лежат на одной окружности.

4. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает сторону AB в точке D, а сторону AC — в точке E. Пусть X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается ω.

5. В треугольнике ABC отмечены середины M, N и P сторон BC, CA и AB соответственно, а G — точка пересечения медиан. Описанная окружность треугольника BGP повторно пересекает прямую MP в точке K, а описанная окружность треугольника CGN повторно пересекает прямую MN в точке L. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки E и D соответственно так, что $DE \parallel BC$. Точка F внутри треугольника ABC такова, что $BE = BF$ и $CD = CF$. Докажите, что прямая AF проходит через центр окружности, описанной около треугольника DEF.

7. В разностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Диаметр XY описанной окружности треугольника ABC перпендикулярен AK (порядок точек на окружности: $B{-}X{-}A{-}Y{-}C$). Окружность, проходящая через точки X и Y, пересекает отрезки BK и CK в точках T и Z соответственно. Докажите, что если $KZ = KT$, то $XT \perp YZ$.