Разнобой по ТЧ

1. Найдите все такие простые числа p, что число $p^2 + 11$ имеет ровно шесть различных делителей (включая единицу и само число).

2. Дано натуральное число n и простое число p. Оказалось, что произведение

$$(1^3 + 1)(2^3 + 1) \dots ((n-1)^3 + 1)(n^3 + 1)$$

делится на p^3. Докажите, что $p \leqslant n + 1$.

3. По окружности расставлены 9 натуральных чисел $a, b, c, \dots, i$. Все числа $a + b^c, b + c^d, \dots$ — простые. Какое наибольшее количество разных чисел среди $a, b, \dots$ может быть?

4. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.

5. Про натуральные числа x, y и z известно, что $\text{НОД}(x, y, z) = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$. Докажите, что x, y и z — квадраты натуральных чисел.

6. Даны натуральные $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_1, a_2, a_3]} + \dots + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]} \leqslant 2.$$

7. Про натуральные числа x, y известно, что $x^2 - y^3 = 17$. Докажите, что число $y^2 + 2x + 2$ — составное.