

Комплексные числа и корни

- $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ — длина радиус-вектора z ;
- $\operatorname{Arg} z$ — любое число φ такое, что $\frac{z}{|z|} = \cos \varphi + i \sin \varphi$;
- $|zw| = |z||w|$, $\arg zw = \arg z + \arg w$;
- $(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ (формула Муавра).

Корнями n -й степени из числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называются решения уравнения $w^n = z$. Этих решений ровно n штук, и они имеют вид

$$w_k = r^{1/n} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

1. Вычислите значения выражений:

(а) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{100}$ (б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^n$ (в) $\sqrt[6]{-729}$.

2. Вычислите сумму k -х степеней корней n -й степени из единицы, где k, n — натуральные числа.

3. Вычислите суммы:

(а) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$

(б) $\cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \dots + \cos(n\varphi)$ и $\sin(\varphi) + \sin(2\varphi) + \dots + \sin(n\varphi)$

(в) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots$

4. (а) Докажите, что $\operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(w) = \operatorname{Arg}(z\bar{w})$ с точностью до прибавления 2π .

(б) Докажите, что $\frac{z\bar{w} + \bar{z}w}{2} = |z||w| \cos \alpha$ и $\frac{z\bar{w} - \bar{z}w}{2i} = |z||w| \sin \alpha$, где α — угол между векторами z и w .

5. (а) Вещественные числа α, β, γ таковы, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$, $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$. Докажите, что $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = 0$ и $\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 0$.

(б) Вещественные числа α, β, γ таковы, что $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$ и $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 1$. Чему равно минимально возможное значение $\cos \alpha - \sin \alpha$?

6. Дано комплексное число z , такое, что $|z| = 1$. Докажите, что $|1-z| + |1+z^2| \geq \sqrt{2}$.

7. Докажите, что $x^{66} + x^{55} + x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

8. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — корни n -й степени из единицы.

(а) Докажите, что существует корень $\alpha = \alpha_k$ такой, что α_i является степенью α для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

(б) Сколько α обладают этим свойством?

9. Пусть $\alpha := \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Найдите $(1 - \alpha^1)(1 - \alpha^2) \dots (1 - \alpha^{n-1})$.