

Разбиения на доминошки

Доминошка — прямоугольник размера 2×1 . Во всех задачах ниже (где возможны разнопрочтения) считаем, что доминошка на доске накрывает ровно две соседние клетки.

1. Квадрат $2k \times 2k$ разбит на доминошки. Главная диагональ квадрата разрезает некоторые доминошки на части: треугольник и четырёхугольник. Докажите, что треугольников над диагональю столько же, сколько и под диагональю.
2. Клетчатая прямоугольная доска покрыта доминошками в два слоя (каждая половинка доминошки расположена над одной клеткой доски). Назовём доминошку верхнего слоя *особой*, если её половинки лежат на двух доминошках разных направлений. Обязательно ли количество особых доминошек чётно?
3. Сколькими способами можно разбить на доминошки полосу $2 \times n$?
4. Клетчатый прямоугольник разрезали на доминошки так, что любая прямая, идущая по линиям сетки, пересекает кратное четырём число доминошек. Докажите, что длина одной из сторон прямоугольника делится на 4.
5. Доска 2010×2011 покрыта доминошками 2×1 ; некоторые из них лежат горизонтально, некоторые — вертикально. Докажите, что граница горизонтальных доминошек с вертикальными имеет чётную длину.
6. Можно ли какой-нибудь клетчатый многоугольник, все стороны которого имеют нечётную длину, разбить на доминошки?
7. Докажите, что любую шахматную (чёрно-белую) доску без двух разноцветных клеток можно разбить на доминошки.
8. Из шахматной доски вырезали 10 клеток. Известно, что среди вырезанных клеток есть как черные, так и белые. Какое наибольшее количество доминошек можно после этого гарантированно вырезать из этой доски?
9. Пусть $n \geq 20$ — натуральное число. Имеется неограниченный запас доминошек, на каждой из которых в одной клетке написано число 1, а в другой — число 2. Какое наименьшее количество таких доминошек нужно положить на клетчатую доску $n \times n$ так, чтобы каждая доминошка занимала ровно две клетки, разные доминошки не перекрывались, и в каждой строке и в каждом столбце сумма попавших туда чисел была не меньше 4?