

Разнобой по геометрии

1. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник с вершинами в центрах описанных окружностей треугольников ABC , BCD , CDA , DAB — трапеция, подобная $ABCD$.
2. Дан параллелограмм $ABCD$ и точки E и F на его сторонах AB и AD соответственно. Прямая EF пересекает прямые BC и CD в точках P и Q соответственно. Докажите, что площади треугольников PAQ и ECF равны.
3. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K , на стороне CD — точка H , и на отрезке KH — точка M . Докажите, что точка пересечения описанных окружностей треугольников AKM и CHM , отличная от M , лежит на диагонали AC .
4. Окружность ω , лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, касается сторон AB и AF . Оказалось, что касательные из точек C и E к ω , точка пересечения которых не лежит на AD , перпендикулярны. Найдите $\angle COE$.
5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH . Точки M и N — середины отрезков BH и CH соответственно. Докажите, что точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, равноудалена от точек B и C .
6. Дан треугольник ABC , в котором $\angle B = 120^\circ$. Точка D на биссектрисе угла B такова, что $\angle ADB = 2\angle ACB$. Точка E на стороне AB такова, что $AE = AD$. Докажите, что $EC = ED$.
7. На биссектрисе угла с вершиной A выбрана точка B . На отрезке AB выбирается произвольная точка O , для которой окружность с центром в ней радиуса OB пересекает стороны угла в четырёх различных точках. Отрезком соединяются две из них, лежащие на разных сторонах угла и на разных расстояниях от A . Докажите, что все такие отрезки касаются фиксированной окружности.