

Биномиальные коэффициенты в теории чисел

1. Докажите, что для любых натуральных чисел $k \leq n$ число kC_n^k делится на n .
2. Докажите, что для всяких натуральных чисел $m \leq n$ выражение

$$n(C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^{m-1}C_n^{m-1})$$

делится на m .

3. Пусть p — простое число. (а) Докажите, что C_p^k делится на p при всех $1 \leq k \leq p-1$. (б) Докажите, что $C_{p-1}^k \equiv (-1)^k \pmod{p}$ при всех $0 \leq k \leq p-1$. (в) Докажите, что $C_{p^r}^k$ делится на p при всех $1 \leq k < p^r$.
4. (а) Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ равна

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

(б) Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ равна $\frac{n - S_p(n)}{p-1}$, где $S_p(n)$ обозначает сумму цифр числа n в p -ичной системе счисления.

(в) (**Теорема Куммера**) Докажите, что для любых неотрицательных целых чисел a и b степень вхождения $\nu_p(C_{a+b}^a)$ простого числа p равна числу переносов при сложении a и b в столбик в p -ичной системе счисления.

5. (а) Дано простое число p и неотрицательные целые числа n_1, k_1, n_0, k_0 , причём $0 \leq n_0, k_0 < p$. Обозначим $n := pn_1 + n_0$, $k := pk_1 + k_0$. Докажите, что $C_n^k \equiv C_{n_1}^{k_1} C_{n_0}^{k_0} \pmod{p}$.

(б) (**Теорема Люка**) Пусть $n = \overline{n_s n_{s-1} \dots n_0}_p$ и $k = \overline{k_s k_{s-1} \dots k_0}_p$ — неотрицательные целые числа, записанные в системе счисления с простым основанием p (при необходимости дополняем записи ведущими нулями). Докажите, что

$$C_n^k \equiv C_{n_s}^{k_s} \dots C_{n_1}^{k_1} C_{n_0}^{k_0} \pmod{p}.$$

6. Сколько нечётных чисел среди $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$, если в двоичной записи натурального числа n ровно s единиц?
7. Докажите, что среди чисел $C_{2^n}^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$, ровно одно делится на 2, но не на 4 при любом натуральном $n \geq 1$.
8. Пусть $p > 2$ — простое число. Найдите все натуральные n такие, что:
 - (а) каждое из чисел $C_n^1, \dots, C_n^{n-1}$ делится на p ;
 - (б) каждое из чисел $C_n^1, \dots, C_n^{n-1}$ не делится на p .
9. Найдите все натуральные числа $n > 2$ такие, что C_{n-k}^k чётно для всех целых $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

10. **(Биномиальная система счисления)** Дано натуральное число k . Докажите, что всякое натуральное число n можно представить в виде

$$n = C_{m_1}^1 + C_{m_2}^2 + \cdots + C_{m_k}^k$$

для некоторых целых $0 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_k$ единственным образом.