Алгоритмы

1. У геолога есть чашечные весы без гирь и 8 камней. Он хочет знать, верно ли, что два камня всегда тяжелее одного. Как ему гарантированно проверить это за 13 взвешиваний?

2. Есть 15 пустых коробок. За одну операцию можно выбрать несколько коробок и сложить в них камни, причём количества положенных камней должны быть равны попарно различным степеням двойки. Через какое наименьшее положительное число таких операций в коробках может оказаться одинаковое число камней?

3. У Пети есть 8 монет, про которые он знает только, что 7 из них настоящие и весят одинаково, а одна фальшивая и отличается от настоящей по весу, неизвестно в какую сторону. У Васи есть чашечные весы — они показывают, какая чашка тяжелее, но не показывают, насколько. За каждое взвешивание Петя платит Васе (до взвешивания) одну монету из имеющихся у него. Если уплачена настоящая монета, Вася сообщит Пете верный результат взвешивания, а если фальшивая, то случайный. Петя хочет определить 5 настоящих монет и не отдать ни одну из этих монет Васе. Может ли Петя гарантированно этого добиться?

4. В каждой клетке квадрата 8×8 находится монета. Четыре монеты фальшивые, и клетки с ними образуют тетрамино. (Напомним, что тетрамино бывают пяти типов; тетрамино, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.) За одну операцию можно указать на любое подмножество клеток, и прибор покажет, сколько фальшивых монет в этом подмножестве. Можно ли за три операции определить тип тетрамино?

5. Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. Можно назвать положительную дробь y, меньшую 1, и Петя назовёт числитель несократимой дроби, равной сумме $x + y$. Как за два таких действия гарантированно узнать x?

6. N узников сидят в камерах, расположенных по кругу. Сегодня у них есть возможность посовещаться и договориться, а завтра поутру каждый узник бросит игральный кубик. После этого каждый должен сделать предположение — какое число выпало у каждого из 5 узников, сидящих в 5 камерах, следующих по часовой стрелке. Если будет угадано хотя бы одно из выпавших чисел хоть у какого-то узника, всех освободят. Как им действовать, чтобы гарантированно выйти на свободу, если
(а) $N = 47$; **(б)** $N = 48$?

7. Неизвестный 100-значный код X составлен из цифр 1 и 2. *Характеристикой* произвольного 100-значного числа Y, также составленного из единиц и двоек, назовём количество разрядов, в которых цифры числа Y совпадают с цифрами кода. Докажите, что, узнав характеристики некоторых фиксированных 80 чисел $Y_1, \ldots, Y_{80}$, можно определить X.