Разнобой по геометрии

1. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC (с прямым углом C) касается сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на высоте треугольника ABC, проведённой из вершины C.

2. На плоскости даны две пересекающиеся окружности. Точка A — одна из двух точек пересечения. В каждой окружности проведён диаметр, параллельный касательной в точке A к другой окружности, причём эти диаметры не пересекаются. Докажите, что концы этих диаметров лежат на одной окружности.

3. В треугольнике ABC отмечены середины M, N и P сторон BC, CA и AB соответственно, а G — точка пересечения медиан. Окружность (BGP) повторно пересекает прямую MP в точке K, а окружность (CGN) повторно пересекает прямую MN в точке L. Докажите, что $\angle BAK = \angle CAL$.

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки E и D соответственно так, что $DE \parallel BC$. Точка F внутри треугольника ABC такова, что $BE = BF$ и $CD = CF$. Докажите, что прямая AF проходит через центр окружности (DEF).

5. Про параллелограмм $ABCD$ известно, что $\angle DAC = 90^\circ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из A на CD, P — такая точка на прямой AC, что прямая PD касается описанной окружности треугольника ABD. Докажите, что $\angle PBA = \angle DBH$.

6. В разностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AK. Диаметр XY окружности (ABC) перпендикулярен AK (порядок точек на окружности: $B{-}X{-}A{-}Y{-}C$). Окружность, проходящая через точки X и Y, пересекает отрезки BK и CK в точках T и Z соответственно. Докажите, что если $KZ = KT$, то $XT \perp YZ$.

7. Точка P лежит внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$. Докажите, что один из ТаНгЕнСоВ (!) $\operatorname{tg}\angle APD$, $\operatorname{tg}\angle BPE$, $\operatorname{tg}\angle CPF$ равен сумме двух других.