Спуск по Виету

Пример: Докажите, что если для некоторых натуральных чисел a, b выполнено $a^2 + b^2 \vdots ab + 1$, то $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ — точный квадрат.

1. Натуральные числа a и b таковы, что число $a^2 + b^2 + 1$ делится на ab.
(а) Чему может быть равно частное?
(б) Докажите, что a и b — числа Фибоначчи.

2. Натуральные числа a и b таковы, что число $\frac{a^2+b^2}{ab-1}$ — целое. Докажите, что оно равно 5.

3. Натуральные числа a, b, c таковы, что $0 < a^2 + b^2 - abc < c$. Докажите, что $a^2 + b^2 - abc$ — точный квадрат.

4. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = kabc$ в натуральных числах
(а) не имеет решений при $k = 2$;
(б) не имеет решений при $k > 3$;
(в) имеет бесконечно много решений при $k = 1$ и $k = 3$.

5. Дано натуральное число k. Докажите, что существует бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $\{a_i\}$ такая, что для любого n число $a_n^2 + k$ делится на a_{n+1}, а число $a_{n+1}^2 + k$ делится на a_n.

6. Натуральные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2abc$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $\frac{a+1}{2}$, $\frac{b+1}{2}$, $\frac{c+1}{2}$ является точным квадратом.

7. Пусть a и b — натуральные числа. Докажите, что если $4ab - 1$ делит $(4a^2 - 1)^2$, то $a = b$.

8. Найдите наименьшее натуральное n или докажите, что такого n не существует, обладающее следующим свойством: существует бесконечно много различных наборов из n положительных рациональных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, что

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{и} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

являются целыми числами.