

Разнобой по геометрии

1. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник с вершинами в центрах описанных окружностей треугольников ABC , BCD , CDA , DAB — трапеция, подобная $ABCD$.
2. Прямоугольный треугольник разрезан на подобные ему прямоугольные треугольники. Докажите, что сумма произведений длин медиан из острых углов всех треугольников разбиения равна произведению длин медиан из острых углов большого треугольника.
3. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K , на стороне CD — точка H , и на отрезке KH — точка M . Докажите, что точка пересечения окружностей (AKM) и (CHM) , отличная от M , лежит на диагонали AC .
4. Дан треугольник ABC , в котором $\angle B = 120^\circ$. Точка D на биссектрисе угла B такова, что $\angle ADB = 2\angle ACB$. Точка E на стороне AB такова, что $AE = AD$. Докажите, что $EC = ED$.
5. На биссектрисе угла с вершиной A выбрана точка B . На отрезке AB выбирается произвольная точка O , для которой окружность с центром в ней радиуса OB пересекает стороны угла в четырёх различных точках. Отрезком соединяются две из них, лежащие на разных сторонах угла и на разных расстояниях от A . Докажите, что все такие отрезки касаются фиксированной окружности.
6. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Пусть B_2 и C_2 — середины отрезков BB_1 и CC_1 соответственно. Прямая B_2C_2 пересекает прямую BC в точке W . Докажите, что $AW = A_1W$.
7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω , где $AB > CD$, и AB не параллелен CD . Точка M является пересечением диагоналей AC и BD , а перпендикуляр из M на AB пересекает отрезок AB в точке E . Оказалось, что прямая EM делит угол CED пополам. Докажите, что AB является диаметром ω .