

Биномиальные коэффициенты в теории чисел

1. Докажите, что для всякого натурального n среди чисел $C_{2n+1}^1, C_{2n+1}^2, \dots, C_{2n+1}^n$ нечётное число нечётных чисел.
2. Докажите, что для всяких натуральных чисел $m \leq n$ выражение

$$n(C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^{m-1} C_n^{m-1})$$

делится на m .

3. (а) Пусть p — простое число. Докажите, что для любых натуральных n, k число $C_{p^n}^k$ делится на p .

(б) Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ равна $\frac{n - S_p(n)}{p - 1}$, где $S_p(n)$ обозначает сумму «цифр» числа n в p -ичной системе счисления.

(в) (**Теорема Куммера**) Степень вхождения $\nu_p(C_{a+b}^a)$ простого числа p равна числу переносов при сложении a и b в столбик в p -ичной системе счисления.

4. (а) Дано простое число p и числа $n_1, k_1, 0 \leq n_0, k_0 < p$. Обозначим $n := pn_1 + n_0, k := pk_1 + k_0$. Докажите, что $C_n^k \equiv_p C_{n_1}^{k_1} C_{n_0}^{k_0}$.

(б) (**Теорема Люка**) Пусть $n = \overline{n_s n_{s-1} \dots n_0}_p$ и $k = \overline{k_s k_{s-1} \dots k_0}_p$ — числа, записанные в системе счисления с простым основанием p . Докажите, что

$$C_n^k \equiv_p C_{n_s}^{k_s} \dots C_{n_1}^{k_1} C_{n_0}^{k_0}.$$

5. Докажите, что среди чисел $\binom{2^n}{k}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$, ровно одно делится на 2, но не на 4.

6. Пусть $p > 2$ — простое число. Найдите все натуральные n такие, что:

(а) каждое из чисел $C_n^1, \dots, C_n^{n-1}$ делится на p ;

(б) каждое из чисел $C_n^1, \dots, C_n^{n-1}$ не делится на p ;

7. Найдите все натуральные числа $n > 2$ такие, что C_{n-k}^k чётно для всех $k \leq n/2$.

8. (**Биномиальная система счисления**) Дано натуральное число k . Докажите, что всякое натуральное число n можно представить в виде

$$n = C_{m_1}^1 + C_{m_2}^2 + \dots + C_{m_k}^k$$

для некоторых $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k$ единственным образом.

9. Докажите, что для любого натурального числа $n > 2$ верно неравенство

$$\text{НОК}(1, 2, \dots, n) > 2^{n-1}.$$