

Раскраска рёбер

Определение. Раскраска рёбер графа в k цветов называется *правильной*, если любые два ребра, имеющие общий конец, покрашены в разные цвета.

Определение. *Рёберное хроматическое число графа* $\chi'(G)$ — это наименьшее количество цветов, для которого существует правильная раскраска рёбер графа G .

Замечание. По сути дела, $\chi'(G)$ — наименьшее число паросочетаний, на которые разбивается множество рёбер графа. Ясно, что $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, где $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины графа G .

1. Приведите пример, когда $\chi'(G) > \Delta(G)$.
2. Докажите, что $\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1$ и $\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$.
3. В графе mn рёбер и несколько вершин. Известно, что рёбра можно раскрасить в m цветов правильным образом. Докажите, что это можно сделать, покрасив в каждый цвет ровно n рёбер.
4. В графе степень каждой вершины равна 3. Оказалось, что число способов покрасить его рёбра правильным образом в 3 цвета не делится на 4. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.
5. Пусть G — двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$
 - (а) если G — регулярный двудольный граф;
 - (б) если G — произвольный двудольный граф.
6. Пусть G — двудольный граф, а минимальная степень вершины $\delta(G)$ равна d . Докажите, что существует раскраска рёбер графа G в d цветов, в которой в каждой вершине представлены все d цветов.
7. Докажите, что существует покраска рёбер полного двудольного графа $K_{m,n}$ в два цвета такая, что число одноцветных подграфов $K_{a,b}$ (a вершин из доли с t вершинами, b вершин из доли с n вершинами) не больше $C_m^a C_n^b 2^{1-ab}$.
8. (а) Пусть в графе G нет правильной покраски рёбер в d цветов. Докажите, что тогда для любого ребра $(x, y) \in E(G)$, любой покраски рёбер графа $G - (x, y)$ в d цветов и любых двух цветов α, β таковых, что из вершины x не исходят рёбра цвета α , а из вершины y — цвета β , найдётся путь из x и y , рёбра которого покрашены в цвета α и β .
 (б) Пусть в графе G нет правильной покраски рёбер в $\Delta(G) + 1$ цветов. Рассмотрим ребро $(x, y_0) \in E(G)$ и любую покраску рёбер графа $G - (x, y_0)$ в $\Delta(G) + 1$ цветов. Докажите, что найдётся последовательность вершин $y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1} = y_1$, соединённых с x и отличных от y_0 , таких, что из вершины y_i не исходят рёбра цвета ребра (x, y_{i+1}) для $i = 1, 2, \dots, k$.
 (в) **Теорема Визинга.** Для произвольного графа G выполнено соотношение $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.