# Алгоритмы

**1.** У геолога есть чашечные весы без гирь и 8 камней. Он хочет знать, верно ли, что два камня всегда тяжелее одного. Как ему гарантированно проверить это за 13 взвешиваний?

**2.** У Пети есть 8 монет, про которые он знает только, что 7 из них настоящие и весят одинаково, а одна фальшивая и отличается от настоящей по весу, неизвестно в какую сторону. У Васи есть чашечные весы — они показывают, какая чашка тяжелее, но не показывают, насколько. За каждое взвешивание Петя платит Васе (до взвешивания) одну монету из имеющихся у него. Если уплачена настоящая монета, Вася сообщит Пете верный результат взвешивания, а если фальшивая, то случайный. Петя хочет определить 5 настоящих монет и не отдать ни одну из этих монет Васе. Может ли Петя гарантированно этого добиться?

**3.** В каждой клетке квадрата $8 \times 8$ находится монета. Четыре монеты фальшивые, и клетки с ними образуют тетрамино. (Напомним, что тетрамино бывают пяти типов; тетрамино, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.) За одну операцию можно указать на любое подмножество клеток, и прибор покажет, сколько фальшивых монет в этом подмножестве. Можно ли за три операции определить тип тетрамино?

**4.** Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. Можно назвать положительную дробь $y$, меньшую 1, и Петя назовёт числитель несократимой дроби, равной сумме $x + y$. Как за два таких действия гарантированно узнать $x$?

**5.** $N$ узников сидят в камерах, расположенных по кругу. Сегодня у них есть возможность посовещаться и договориться, а завтра поутру каждый узник бросит игральный кубик. После этого каждый должен сделать предположение — какое число выпало у каждого из 5 узников, сидящих в 5 камерах, следующих по часовой стрелке. Если будет угадано хотя бы одно из выпавших чисел хоть у какого-то узника, всех освободят. Как им действовать, чтобы гарантированно выйти на свободу, если
**(а)** $N = 47$; **(б)** $N = 48$?

**6.** Неизвестный 100-значный код $X$ составлен из цифр 1 и 2. *Характеристикой* произвольного 100-значного числа $Y$, также составленного из единиц и двоек, назовём количество разрядов, в которых цифры числа $Y$ совпадают с цифрами кода. Докажите, что, узнав характеристики некоторых фиксированных 80 чисел $Y_1, \ldots, Y_{80}$, можно определить $X$.

**7.** Замок Мерлина состоит из 100 комнат и 1000 коридоров. Каждый коридор соединяет какие-то две комнаты, каждые две комнаты соединены не более чем одним коридором. Мерлин выдал мудрецам план замка и объявил испытание. Мудрецы должны будут распределиться по комнатам, как хотят. Далее каждую минуту Мерлин указывает коридор, и один из мудрецов переходит по нему из комнаты на любом его конце в комнату на другом его конце. Мерлин победит, если когда-то укажет коридор, на концах которого нет мудрецов. Число $m$ на-

зовём *волшебным числом замка*, если $m$ мудрецов могут, сговорившись перед испытанием, действовать так, чтобы никогда не проиграть, причём $m$ — минимальное такое число. Чему может равняться волшебное число замка? (Все, включая Мерлина, всегда знают расположение всех мудрецов.)