

Корни из единицы

Формула Муавра: $(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

Корнями n -й степени из числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называются решения уравнения $w^n = z$. Этих решений ровно n штук, и они имеют вид

$$w_k = r^{1/n} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

1. Докажите, что для всех α и $0 < \beta < 2\pi$ сумма

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots + \sin(\alpha + n\beta)$$

ограничена по модулю константой, зависящей только от α и β .

2. Докажите, что $x^{66} + x^{55} + x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ делится на $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

3. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — корни n -й степени из единицы.

(а) Докажите, что существует корень $\alpha = \alpha_k$ такой, что α_i является степенью α для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

(б) Сколько α обладают этим свойством?

4. Вычислите сумму k -х степеней корней n -й степени из единицы, где k, n — натуральные числа.

5. Пусть $\alpha := \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

(а) Найдите $(1 - \alpha^1)(1 - \alpha^2) \dots (1 - \alpha^{n-1})$.

(б) Для каких корней n -й степени из единицы результат будет тот же?

(в) Для нечетных n докажите, что

$$\sqrt{n} = |1 - \alpha| \cdot |1 - \alpha^2| \cdot |1 - \alpha^3| \dots |1 - \alpha^{\frac{n-1}{2}}|.$$

(г) Выведите аналогичное тождество для четных n .

6. Пусть $A_1 A_2, \dots, A_n$ — правильный n -угольник, вписанный в единичную окружность. Найдите произведение всех его сторон и диагоналей.

7. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, вписанный в единичную окружность с центром O . Точка P симметрична точке O относительно точки A . Докажите, что $PB \cdot PC = \sqrt{31}$.

8. Пусть $\omega = \cos \frac{2\pi i}{5} + i \sin \frac{2\pi i}{5}$ — примитивный корень пятой степени из единицы. Докажите, что не существует целых чисел a, b, c, d, k , где $k > 1$ и

$$(a + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3)^k = 1 + \omega.$$