

Разбиения на доминошки

Доминошка — прямоугольник размера 2×1 . Во всех задачах ниже (где возможны разнопрочтения) считаем, что доминошка на доске накрывает ровно две соседние клетки.

1. Клетчатый прямоугольник разрезали на доминошки так, что любая прямая, идущая по линиям сетки, пересекает кратное четырём число доминошек. Докажите, что длина одной из сторон прямоугольника делится на 4.
2. Доска 2010×2011 покрыта доминошками 2×1 ; некоторые из них лежат горизонтально, некоторые — вертикально. Докажите, что граница горизонтальных доминошек с вертикальными имеет чётную длину.
3. Можно ли какой-нибудь клетчатый многоугольник, все стороны которого имеют нечётную длину, разбить на доминошки?
4. Клетки шахматной доски занумерованы числами от 1 до 32 так, что каждое число использовалось дважды. Докажите, что можно выбрать 32 клетки, занумерованные разными числами, так что на каждой вертикали и на каждой горизонтали найдется хотя бы по две выбранные клетки.
5. Докажите, что любую шахматную (чёрно-белую) доску без двух разноцветных клеток можно разбить на доминошки.
6. Из шахматной доски вырезали 10 клеток. Известно, что среди вырезанных клеток есть как черные, так и белые. Какое наибольшее количество доминошек можно после этого гарантированно вырезать из этой доски?
7. Даны чётные числа m и n . Для клетчатого многоугольника X обозначим через $d(X)$ число способов разбить его на доминошки. Обозначим:
 - A — прямоугольник $m \times n$;
 - B — прямоугольник $m \times n$ без четырёх угловых клеток;
 - C — прямоугольник $m \times n$ без двух верхних угловых клеток;
 - D — прямоугольник $m \times n$ без двух нижних угловых клеток;
 - E — прямоугольник $m \times n$ без двух левых угловых клеток;
 - F — прямоугольник $m \times n$ без двух правых угловых клеток.Докажите соотношение $d(A) \cdot d(B) = d(C) \cdot d(D) + d(E) \cdot d(F)$.
8. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0,0)$ и вершинами в точках с целыми координатами, что каждое очередное звено идет по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует червяк — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которых можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших и взаимно простых с n . (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)