

Московские математические классы

Сентябрьская олимпиада для школьников  
7 класса

16 сентября 2026 г.

Решения задач

### Задача 1.

Две группы путешественников совершили автопробег «Москва – Владивосток». В первой группе каждый взял по 7 кг консервов, 5 кг сухофруктов и 3 кг круп, и за время поездки залил 120 литров бензина. Во второй группе каждый взял по 10 кг консервов, 4 кг сухофруктов и 6 кг круп, и за время поездки залил 160 литров бензина. За время автопробега все путешественники в обеих группах вместе залили 19600 литров бензина. Сколько всего килограммов продуктов взяли с собой путешественники?

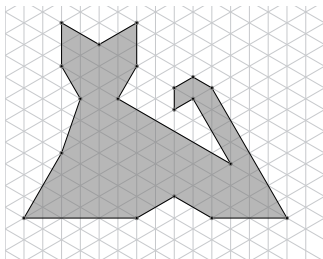
Ответ: 2450.

*Решение.* Каждый член первой группы взял  $7 + 5 + 3 = 15$  кг продуктов на 120 залитых литров бензина, а каждый член второй группы взял  $10 + 4 + 6 = 20$  кг продуктов на 160 залитых литров бензина. Заметим, что  $\frac{120}{15} = \frac{160}{20} = 8$ . Таким образом, каждый путешественник залил литров бензина ровно в 8 раз больше, чем взял килограммов продуктов. Значит, всего продуктов (в кг) взяли в 8 раз меньше, чем залили бензина (в литрах), то есть  $19600 : 8 = 2450$  кг.

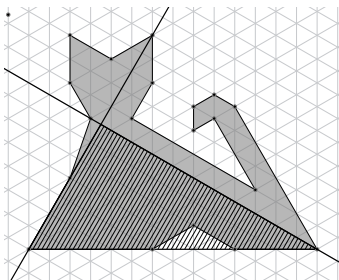
□

### Задача 2.

На белом столе лежит вырезанная из чёрной бумаги фигура в форме котика (см. рис.). Нужно сложить фигуру два раза, каждый раз сгибая её по прямой линии, так, чтобы в результате при взгляде сверху она выглядела как сплошной чёрный треугольник. Покажите, как это сделать — нарисуйте линии сгиба. (Разные части треугольника могут быть накрыты разным числом слоёв бумаги.)



*Решение.* Согнём фигуру вдоль двух перпендикулярных прямых, изображённых на рисунке:



Тогда после двух сгибаний получим прямоугольный треугольник  $\Delta$  (заштрихован на рисунке), образованный этими двумя прямыми и прямой, содержащей горизонтальное основание котика (разные части  $\Delta$  окажутся накрыты разным числом слоёв бумаги: от 1 до 4).

*Комментарий.* Небольшая треугольная область внутри  $\Delta$ , которая изначально не накрыта фигурой, при сгибе накрывается хвостом — поэтому весь треугольник окажется закрыт. Для того, чтобы убедиться, что ничего не будет «торчать» за границы  $\Delta$ , достаточно сделать «обратную» операцию: мысленно отразить треугольник  $\Delta$  относительно каждой из двух изображённых перпендикулярных прямых и относительно их обеих — получив таким образом, вместе с 3 копиями  $\Delta$ , 4 одинаковых треугольника. После чего проверить, что вся исходная фигура окажется полностью накрыта этими треугольниками.

□

### Задача 3.

Известно, что  $\overline{\text{ШЕШТЬ}} - \overline{\text{СЕМЬ}} - \overline{\text{СЕМЬ}} - \dots - \overline{\text{СЕМЬ}} = \overline{\text{МЕСТЬ}}$ . Докажите, что  $\overline{\text{СЕМЬ}}$  вычли не менее восьми раз. (Одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры.)

*Решение.* Пусть  $\overline{\text{СЕМЬ}}$  встречается  $n$  раз. Тогда условие можно записать в виде  $\overline{\text{ШЕШТЬ}} - n \cdot \overline{\text{СЕМЬ}} = \overline{\text{МЕСТЬ}}$ , что эквивалентно:

$$n \cdot \overline{\text{СЕМЬ}} = \overline{\text{ШЕШТЬ}} - \overline{\text{МЕСТЬ}} = (\text{Ш} - \text{М}) \cdot 10000,$$

$$\overline{\text{СЕМЬ}} = \frac{(\text{Ш} - \text{М}) \cdot 10000}{n}.$$

Предположим, что  $n$  не делится ни на 8, ни на 125. Тогда правая часть последнего выражения, после сокращения на  $n$ , разделится на 100 нацело, а значит, число  $\overline{\text{СЕМЬ}}$  должно оканчиваться двумя нулями. Это противоречит тому, что Б и М — различные цифры. Поэтому  $n$  кратно 8 или 125, откуда  $n \geq 8$ .

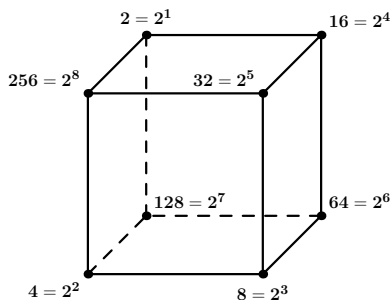
□

### Задача 4.

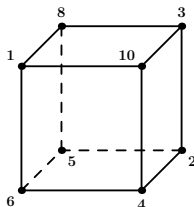
В вершины куба расставили различные натуральные числа. На каждой из шести граней куба написали произведение четырёх чисел в её вершинах. Могут ли все шесть написанных произведений оказаться равными?

*Ответ:* да.

*Решение.* Например, можно расставить числа так, как показано на рисунке. Легко проверить, что на каждой грани произведение чисел равно  $2^{18}$ .



*Комментарий.* Идея построения данного примера заключается в том, что все числа в вершинах – различные степени двойки, за счёт чего можно перейти от произведений чисел к суммам показателей степеней, и подобрать их уже не составляет труда. Существуют и другие примеры, не основанные на этой идее, например, как на втором рисунке – с числами, не превосходящими 10, и произведением 240 на каждой грани. Такой пример можно построить, поняв, что для выполнения требуемого условия произведения пар чисел на концах противоположных рёбер куба должны совпадать.



□

### Задача 5.

На кружках в Центре математического мастерства города  $M$  по средам занимаются 60 семиклассников, 40 восьмиклассников, 30 девятиклассников и 10 десятиклассников. В очередную среду ученики начали по одному заходить в здание Центра математического мастерства. Как только окажется, что количества зашедших в здание учеников во всех параллелях различны, двери здания закроются. Какое наибольшее количество учеников смогут попасть на занятия в эту среду?

*Ответ:* 131.

*Решение.* Оценка. Докажем, что на занятия сможет попасть не более 131 ученика. Поймём, сколько учеников могло быть в здании в момент перед заходом последнего ученика. Из четырёх параллелей в этот момент как минимум

в двух количества зашедших учеников совпадали. Рассмотрим из этих двух параллелей ту, в которой в принципе учеников меньше, обозначим общее количество учеников этой параллели за  $n$ . Ясно, что в здание не может войти больше  $n$  учеников этой параллели. Следовательно, учеников второй параллели к этому моменту также вошло не больше  $n$ . Общие численности учеников в любых двух параллелях различаются хотя бы на 10. Поэтому как минимум 10 учеников второй (более многочисленной) параллели ещё не вошли в здание. Значит, перед заходом последнего ученика внутри может находиться не более  $(60 + 40 + 30 + 10) - 10 = 130$  учеников, и всего попасть в здание смогут не более 131 ученика.

Пример. Покажем, как в здание сможет попасть 131 ученик. Сначала пусть войдут по очереди все 30 девятиклассников и 30 восьмиклассников (всё это время семиклассников и десятиклассников в здании по 0). После этого пусть войдут все 10 десятиклассников и 60 семиклассников (всё это время восьмиклассников и девятиклассников в здании по 30). После входа  $30 + 30 + 60 + 10 = 130$  учеников количества учащихся разных параллелей будут равны соответственно 60, 30, 30, 10, и сможет войти ещё один восьмиклассник — 131-ый ученик.

□

## Задача 6.

На доске написаны 17 различных натуральных чисел, взаимно простых с 1155. Может ли быть так, что сумма любых двух из них имеет с 1155 общий делитель, больший 1?

*Ответ:* нет.

*Решение.* Разложим на простые множители:  $1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ . Значит, натуральное число будет иметь с 1155 общий делитель, больший 1, тогда и только тогда, когда это число кратно хотя бы одному из чисел 3, 5, 7 или 11.

Покажем, что среди 17 чисел на доске найдутся такие два числа  $a$  и  $b$ , что  $a + b$  не кратно 3, 5, 7 и 11. Рассмотрим остатки по этим 4 модулям, и по каждому модулю  $m$  назовём ненулевые остатки, меньшие  $\frac{m}{2}$ , «маленькими», а большие  $\frac{m}{2}$  — «большими». Тогда каждому натуральному числу  $A$  соответствует некоторый двоичный код, который строится по следующему правилу: если по  $i$ -му из перечисленных модулей число  $A$  даёт «маленький» остаток — на  $i$ -ую позицию соответствующего кода ставим «1», а если «большой» остаток — ставим «0». Поскольку  $17 > 2^4 = 16$ , среди построенных таким образом четырёхзначных двоичных кодов, соответствующих любым 17-ти натуральным числам, найдутся два одинаковых. По правилу построения кодов это означает, что соответствующие этим кодам два натуральных числа  $a$  и  $b$  по каждому из перечисленных модулей либо оба будут иметь «маленькие» остатки, либо оба — «большие». В

первом случае сумма остатков чисел  $a$  и  $b$  по данному модулю  $m$  будет находиться на интервале  $(0; m)$ , во втором случае – на интервале  $(m; 2m)$ , то есть в любом случае  $a + b$  не будет кратно  $m$ . Поскольку это верно для всех модулей 3, 5, 7 и 11, требуемое доказано.

□

### Задача 7.

Выбиратель выбирает некоторые  $k \leq 32$  клеток клетчатой доски  $8 \times 8$ , никакие две из которых не граничат по стороне, и ставит на каждую из них по фишке. Сдвигатель должен сдвинуть одну из фишек на соседнюю по стороне клетку так, чтобы никакие две фишки по-прежнему не стояли в соседних клетках. Найдите наибольшее  $k$  такое, что Сдвигатель гарантированно сможет это сделать, независимо от действий Выбирателя.

*Ответ:* 13.

*Решение.* Сначала для всех  $k$  от 14 до 32 покажем, что Выбиратель может выбрать клетки так, чтобы Сдвигатель не смог сдвинуть ни одной фишки.

Сначала ставим 14 фишек на клетки, которые отмечены на картинке крестиками. Потом, если  $k \geq 20$ , ставим ещё 6 фишек на диагоналях  $e1 - h4$  и  $g1 - h2$ . Если  $k \geq 26$ , тогда ещё 6 фишек ставим на диагоналях  $a5 - d8$  и  $a7 - b8$ . После этого у нас останется не более 6 нерасставленных фишек. Их располагаем на главной диагонали в произвольном порядке.

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 |   |   |   |   | × |   |   |
| 7 |   |   |   |   | × |   | × |
| 6 |   |   |   | × |   |   | × |
| 5 |   |   | × |   |   |   | × |
| 4 |   | × |   |   |   | × |   |
| 3 | × |   |   |   | × |   |   |
| 2 |   | × |   | × |   |   |   |
| 1 |   |   | × |   |   |   |   |
|   | a | b | c | d | e | f | g |

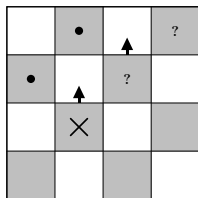
Теперь покажем, что при  $k = 13$  Сдвигатель всегда сможет сдвинуть какую-то из фишек. Раскрасим доску в шахматную раскраску как на рисунке выше.

Сначала разберёмся, как вообще устроены расстановки, в которых никакие две фишки не стоят рядом, и при этом ни одну фишку сдвинуть нельзя. Докажем для любой такой расстановки несколько утверждений.

Утверждение 1. Пусть есть две соседние диагонали одного цвета, на одной из которых есть фишки, а на другой – нет. Тогда фишки присутствуют на той диагонали, которая длиннее, причём она фишками заставлена полностью.

Доказательство У1.

Без ограничения общности, пускай обе диагонали идут вправо-вверх, при этом диагональ с фишками правее. Выберем любую фишку (X) на этой диагонали и попробуем сдвинуть её вверх (см. рис.). На местах, отмеченных точками, фишек быть не может по предположению. Поэтому сдвигу должна мешать либо фишка рядом на той же диагонали, либо край доски.



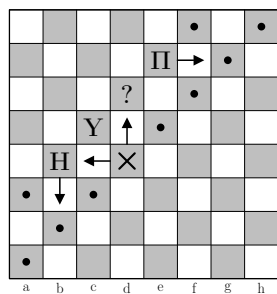
Аналогичные рассуждения верны для сдвига фишки влево. Поэтому вся диагональ должна быть заполнена фишками, причём она упирается в край доски и сверху, и слева — а значит соседняя пустая диагональ её короче.

Утверждение 2. Пусть диагональ упирается в края доски сверху и слева, и при этом на ней стоит ровно одна фишка. Тогда на всех параллельных диагоналях того же цвета левее неё тоже стоит ровно по одной фишке. И все эти фишки находятся на главной диагонали, которая перпендикулярна нашей.

Доказательство У2.

Попробуем сдвинуть нашу фишку (X) вверх или влево (см. рис.). Этому может помешать либо граница доски, либо фишка на соседней диагонали того же цвета. Значит либо мы находимся в углу, либо на соседней слева диагонали того же цвета есть фишки. Рассмотрим самую правую (П) и самую нижнюю (Н) среди них.

Если П не располагается левее X, её можно сдвинуть вправо. Если Н не располагается выше X, её можно сдвинуть вниз.



Значит на соседней слева диагонали фишка единственна и стоит в клетке Y.

Те же рассуждения проводим для диагонали, на которой стоит Y и т.д., пока не придём к единственной фишке, стоящей в углу. А раз мы пришли в угол, значит все эти фишки, включая X, находятся на главной диагонали.

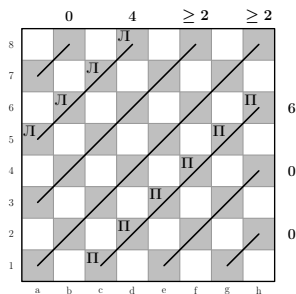
Аналоги утверждения 2, естественно, верны и для остальных видов диагоналей.

Утверждение 3. На чёрных клетках доски находится либо 0 фишек, либо 8 (все на одной диагонали), либо не меньше 14.

Доказательство У3.

Рассмотрим чёрную диагональ из 8 клеток и все параллельные ей. Пусть на какой-то из них стоит ровно 1 фишка. Тогда по У2 эта фишка должна одновременно находиться и на перпендикулярной главной диагонали — которая белая! Значит на каждой из таких чёрных диагоналей либо 0, либо не меньше 2 фишек.

Допустим, на чёрных клетках вообще есть фишки. Выберем из непустых рассматриваемых диагоналей самую левую (Л) и самую правую (П). Из У1 следует, что Л и П заполнены фишками, главная диагональ находится между ними, и все чёрные диагонали между Л и П — непустые (см. рис).



Если  $L = P =$  главная диагональ, тогда на чёрных клетках ровно 8 фишек.

Допустим, без ограничения общности, что Л — не главная диагональ. В этом случае на чёрных клетках треугольника  $a3 - a8 - f8$  (при раскраске как на рисунке выше) стоит как минимум 6 фишек, а на чёрных клетках треугольника  $a1 - h8 - h1$  — как минимум 8. Соответственно, всего на чёрных клетках стоит не меньше 14 фишек.

Утверждение 4. Не существует расстановки 13 фишек такой, что никакие две из них не стоят рядом, но при этом ни одну фишку сдвинуть нельзя.

Доказательство У4. Мы только что доказали, что для любой такой расстановки на чёрных клетках должно находиться 0, 8 или не меньше 14 фишек. Аналогично, на белых клетках должно тоже находиться 0, 8 или не меньше 14 фишек.

Число 13 нельзя разбить на два слагаемых нужного вида, поэтому расстановки для 13 фишек не существует.

□