Диагностическая работа. Дистанционный этап.

Задача 1.1. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_{100})$ — произвольная перестановка целых чисел $\{1, 2, \ldots,$ $100\}$ (все x_i различны). Найдите наименьшее возможное значение суммы

$$S = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{100} - x_{99}| + |x_1 - x_{100}|.$$

Ответ: 198

Решение. Пример. Для $x_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, 100$ искомая сумма S равна 198.

Оценка. Пусть $x_i = 1, x_j = 100$. Без ограничения общности предположим, что $i < j$. Тогда

$$\begin{gathered}S = \big(|x_j - x_{j+1}| + \ldots + |x_{99} - x_{100}| + |x_{100} - x_1| + |x_1 - x_2| + \ldots |x_{i-1} - x_i|\big) + \\ + \big(|x_j - x_{j-1}| + \ldots + |x_{i+1} - x_i|\big) \geq \\ \geq \big((x_j - x_{j+1}) + \ldots + (x_{99} - x_{100}) + (x_{100} - x_1) + (x_1 - x_2) + \ldots (x_{i-1} - x_i)\big) + \\ + \big((x_j - x_{j-1}) + \ldots + (x_{i+1} - x_i)\big) = 2(x_j - x_i) = 2 \cdot 99 = 198.\end{gathered}$$

□

Задача 1.2. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_{200})$ — произвольная перестановка целых чисел $\{1, 2, \ldots, 2$ (все x_i различны). Найдите наименьшее возможное значение суммы

$$S = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{200} - x_{199}| + |x_1 - x_{200}|.$$

Ответ: 398

Задача 1.3. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_{300})$ — произвольная перестановка целых чисел $\{1, 2, \ldots, 3$ (все x_i различны). Найдите наименьшее возможное значение суммы

$$S = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{300} - x_{299}| + |x_1 - x_{300}|.$$

Ответ: 598

Задача 1.4. Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_{400})$ — произвольная перестановка целых чисел $\{1, 2, \ldots, 4$ (все x_i различны). Найдите наименьшее возможное значение суммы

$$S = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{400} - x_{399}| + |x_1 - x_{400}|.$$

Ответ: 798

Задача 2.1. Найдите количество пар натуральных чисел $1 \leqslant a \leqslant b$, таких что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2025}$.

Ответ: 23

Решение. Домножив на знаменатели, получим равенство $2025(a+b)=ab$. Пусть $d=$ НОД(a,b), $a=da'$, $b=db'$. Тогда НОД$(a',b')=1$, а полученное равенство после сокращения на d принимает вид $2025(a'+b')=da'b'$. Поскольку

$$\text{НОД}(a'+b',b')=\text{НОД}(a'+b',a')=\text{НОД}(a',b')=1,$$

получаем, что $a'b' \mid 2025$. Так как $2025=3^4\cdot 5^2$ и НОД$(a',b')=1$, либо одно из чисел a', b' — ненулевая степень тройки, а второе — ненулевая степень пятёрки, либо одно равно 1, а второе делит 2025. Поскольку $a\le b$, то $a'\le b'$. Тогда существует $5\cdot 3=15$ допустимых пар (a',b') второго типа (по количеству делителей числа 2025) и $4\cdot 2=8$ допустимых пар первого типа, поскольку значения a', b' однозначно восстанавливаются по паре их возможных значений с помощью неравенства $a'\le b'$. Поскольку d из равенства $2025(a'+b')=da'b'$ для каждой из найденных пар (a',b') восстанавливается однозначно, получаем, что всего существует 23 искомые пары чисел a и b. □

Задача 2.2. Найдите количество пар натуральных чисел $1\leqslant a\leqslant b$, таких что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3375}$.

Ответ: 25

Задача 2.3. Найдите количество пар натуральных чисел $1\leqslant a\leqslant b$, таких что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{10125}$.

Ответ: 32

Задача 2.4. Найдите количество пар натуральных чисел $1\leqslant a\leqslant b$, таких что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4000}$.

Ответ: 39

Задача 3.1. Есть 11 больших коробок. В некоторых из них находится по 8 средних коробок, а остальные пустые. Кроме того, в некоторых средних коробках находится по 8 маленьких коробок, а остальные пустые. Все маленькие коробки пустые. Определите общее количество коробок, если количество пустых коробок равно 102.

Ответ: 115

Решение. Пусть есть всего a непустых больших коробок и b непустых средних коробок. По условию есть всего $(11-a)$ пустых больших коробок, $(8a-b)$ пустых средних коробок и $8b$ пустых маленьких коробок. Значит,

$$(11-a)+(8a-b)+8b=102 \Longrightarrow a+b=\frac{102-11}{7}=13.$$

Тогда общее количество коробок равно $11+8a+8b=11+8\cdot 13=115$. □

Задача 3.2. Есть 11 больших коробок. В некоторых из них находится по 8 средних коробок, а остальные пустые. Кроме того, в некоторых средних коробках находится по 8 маленьких коробок, а остальные пустые. Все маленькие коробки пустые. Определите общее количество коробок, если количество пустых коробок равно 109.

Ответ: 123

Задача 3.3. Есть 11 больших коробок. В некоторых из них находится по 8 средних коробок, а остальные пустые. Кроме того, в некоторых средних коробках находится по 8 маленьких коробок, а остальные пустые. Все маленькие коробки пустые. Определите общее количество коробок, если количество пустых коробок равно 116.

Ответ: 131

Задача 3.4. Есть 11 больших коробок. В некоторых из них находится по 8 средних коробок, а остальные пустые. Кроме того, в некоторых средних коробках находится по 8 маленьких коробок, а остальные пустые. Все маленькие коробки пустые. Определите общее количество коробок, если количество пустых коробок равно 123.

Ответ: 139

Задача 4.1. Муравей Михаил проходит путь на клетчатой сетке от (0, 0) до (20, 24), перемещаясь либо на одну единицу вправо, либо на одну единицу вверх каждую секунду. Он записывает все координаты точек решётки, на которых побывал, включая начальную и конечную точки. Оказалось, что сумма всех записанных им x-координат равна 271. Вычислите сумму всех записанных им y-координат.

Ответ: 719

Решение. Заметим, что после каждого перемещения сумма координат точки, в которой находится Михаил, увеличивается ровно на 1. Изначально эта сумма равна 0, а в конце маршрута — 44. Таким образом, сумма записанных y-координат равна

$$1 + 2 + \ldots + 44 - 271 = \frac{44 \cdot 45}{2} - 271 = 719.$$

□

Задача 4.2. Муравей Михаил проходит путь на клетчатой сетке от (0, 0) до (20, 24), перемещаясь либо на одну единицу вправо, либо на одну единицу вверх каждую секунду. Он записывает все координаты точек решётки, на которых побывал, включая начальную и конечную точки. Оказалось, что сумма всех записанных им x-координат равна 272. Вычислите сумму всех записанных им y-координат.

Ответ: 718

Задача 4.3. Муравей Михаил проходит путь на клетчатой сетке от (0, 0) до (20, 24), перемещаясь либо на одну единицу вправо, либо на одну единицу вверх каждую секунду. Он записывает все координаты точек решётки, на которых побывал, включая начальную и конечную точки. Оказалось, что сумма всех записанных им x-координат равна 273. Вычислите сумму всех записанных им y-координат.

Ответ: 717

Задача 4.4. Муравей Михаил проходит путь на клетчатой сетке от (0, 0) до (20, 24), перемещаясь либо на одну единицу вправо, либо на одну единицу вверх каждую секунду. Он записывает все координаты точек решётки, на которых побывал, включая начальную и конечную точки. Оказалось, что сумма всех записанных им x-координат равна 274. Вычислите сумму всех записанных им y-координат.

Ответ: 716

Задача 5.1. Лучи BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Оказалось, что $AC = CX$ и $\angle AXB = 35°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

Напомним, что угол между прямыми — это наименьший из углов, образующихся при их пересечении.

Ответ: 75

Решение. Поскольку $AC = CX$, треугольник ACX — равнобедренный и $\angle CAX = \angle CXA = 35°$. По свойству внешнего угла $\angle BCA = \angle CXA + \angle CAX = 70°$. Углы $\angle BDA$ и $\angle BCA$ равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Пусть E — точка пересечения диагоналей AC и BD. Из треугольника AED находим

$$\angle AED = 180° - \angle CAX - \angle BDA = 180° - 35° - 70° = 75°.$$

□

Задача 5.2. Лучи BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Оказалось, что $AC = CX$ и $\angle AXB = 34°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

Напомним, что угол между прямыми — это наименьший из углов, образующихся при их пересечении.

Ответ: 78

Задача 5.3. Лучи BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Оказалось, что $AC = CX$ и $\angle AXB = 33°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

Напомним, что угол между прямыми — это наименьший из углов, образующихся при их пересечении.

Ответ: 81

Задача 5.4. Лучи BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке X. Оказалось, что $AC = CX$ и $\angle AXB = 32°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

Напомним, что угол между прямыми — это наименьший из углов, образующихся при их пересечении.

Ответ: 84

Задача 6.1. Натуральное число n удовлетворяет условию:

$$\left\{\frac{n}{3}\right\}+\left\{\frac{n}{5}\right\}+\left\{\frac{n}{11}\right\}=\frac{122}{165}.$$

Найдите все возможные значения выражения

$$\left\{\frac{2n}{3}\right\}+\left\{\frac{2n}{5}\right\}+\left\{\frac{2n}{11}\right\}.$$

Напомним, что через $\{y\}$ обозначается дробная часть числа y.

Ответ: 244/165

Решение. Пусть

$$\left\{\frac{n}{3}\right\}=\frac{a}{3},\ \left\{\frac{n}{5}\right\}=\frac{b}{5},\ \left\{\frac{n}{11}\right\}=\frac{c}{11},$$

где $0 \le a \le 2$, $0 \le b \le 4$, $0 \le c \le 10$ и

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{5}+\frac{c}{11}=\frac{122}{165} \Longleftrightarrow 55a+33b+15c=122.$$

Рассматривая остатки обеих частей полученного равенства при делении на 3, 5 и 11 соответственно получаем, что

$$a \equiv 2 \pmod 3,\ \ b \equiv 4 \pmod 5,\ \ c \equiv 3 \pmod{11}.$$

Из данных сравнений и ограничений на a, b, c находим $a=2$, $b=4$, $c=3$. Заметим, что обе суммы дробных частей из условия не изменятся, если к n прибавить произвольное целое число, делящееся на 165. Поэтому достаточно найти остаток n по модулю 165, сравнимый с a, b и c по модулям 3, 5, 11 соответственно. Этот остаток $n=14$. Таким образом, находим

$$\left\{\frac{2\cdot 14}{3}\right\}+\left\{\frac{2\cdot 14}{5}\right\}+\left\{\frac{2\cdot 14}{11}\right\}=\frac{244}{165}.$$

□

Задача 6.2. Натуральное число n удовлетворяет условию:

$$\left\{\frac{n}{3}\right\}+\left\{\frac{n}{5}\right\}+\left\{\frac{n}{11}\right\}=\frac{41}{55}.$$

Найдите все возможные значения выражения

$$\left\{\frac{2n}{3}\right\}+\left\{\frac{2n}{5}\right\}+\left\{\frac{2n}{11}\right\}.$$

Напомним, что через $\{y\}$ обозначается дробная часть числа y.

Ответ: 27/55

Задача 6.3. Натуральное число n удовлетворяет условию:

$$\left\{\frac{n}{3}\right\}+\left\{\frac{n}{5}\right\}+\left\{\frac{n}{11}\right\}=\frac{25}{33}.$$

Найдите все возможные значения выражения

$$\left\{\frac{2n}{3}\right\}+\left\{\frac{2n}{5}\right\}+\left\{\frac{2n}{11}\right\}.$$

Напомним, что через $\{y\}$ обозначается дробная часть числа y.

Ответ: 17/33

Задача 6.4. Натуральное число n удовлетворяет условию:

$$\left\{\frac{n}{3}\right\}+\left\{\frac{n}{5}\right\}+\left\{\frac{n}{11}\right\}=\frac{124}{165}.$$

Найдите все возможные значения выражения

$$\left\{\frac{2n}{3}\right\}+\left\{\frac{2n}{5}\right\}+\left\{\frac{2n}{11}\right\}.$$

Напомним, что через $\{y\}$ обозначается дробная часть числа y.

Ответ: 248/165

Задача 7.1. Подмножество $T \subset \{1, 2, \ldots, 2025\}$ назовём **непредсказуемым**, если выполнены следующие свойства:

1. T содержит по крайней мере 2 различных числа;
2. $x + y$ не делится на $x - y$ для любых двух различных чисел x и y из T.

Например, подмножество $T = \{31, 71, 346\}$ — **непредсказуемое**, а $T = \{5, 15, 75\}$ — нет, поскольку $15 + 5 = 20$ делится на $15 - 5 = 10$.

Какое наибольшее количество чисел может содержать **непредсказуемое** подмножество?

Ответ: 675

Решение. Пример. Выберем в качестве T подмножество $\{1, 4, \ldots, 2023\}$, состоящее из всех чисел, не превосходящих 2025, дающих остаток 1 при делении на 3. Если $3k + 1$, $3l + 1$, $k > l$ — два различных числа из T, то $3k + 1 + 3l + 1 = 3(k + l) + 2$ не делится на $(3k + 1 - 3l - 1) = 3(k - l)$, поскольку $3(k + l) + 2$ не делится даже на 3.

Оценка. Если $x - y = 1$, то $x + y$ делится на $x - y$. Также если $x - y = 2$, то x и y имеют одну и ту же чётность, поэтому $x + y$ делится на $x - y = 2$. Таким образом, любые два различных числа из T отличаются не меньше чем на 3. Значит, T содержит не более чем $\left\lceil \frac{2025}{3} \right\rceil = 675$ различных чисел. $\square$

Задача 7.2. Подмножество $T \subset \{1, 2, \ldots, 2022\}$ назовём **непредсказуемым**, если выполнены следующие свойства:

1. T содержит по крайней мере 2 различных числа;
2. $x + y$ не делится на $x - y$ для любых двух различных чисел x и y из T.

Например, подмножество $T = \{31, 71, 346\}$ — **непредсказуемое**, а $T = \{5, 15, 75\}$ — нет, поскольку $15 + 5 = 20$ делится на $15 - 5 = 10$.

Какое наибольшее количество чисел может содержать **непредсказуемое** подмножество?

Ответ: 674

Задача 7.3. Подмножество $T \subset \{1, 2, \ldots, 2028\}$ назовём **непредсказуемым**, если выполнены следующие свойства:

1. T содержит по крайней мере 2 различных числа;
2. $x + y$ не делится на $x - y$ для любых двух различных чисел x и y из T.

Например, подмножество $T = \{31, 71, 346\}$ — **непредсказуемое**, а $T = \{5, 15, 75\}$ — нет, поскольку $15 + 5 = 20$ делится на $15 - 5 = 10$.

Какое наибольшее количество чисел может содержать **непредсказуемое** подмножество?

Ответ: 676

Задача 7.4. Подмножество $T \subset \{1, 2, \ldots, 2031\}$ назовём **непредсказуемым**, если выполнены следующие свойства:

1. T содержит по крайней мере 2 различных числа;
2. $x + y$ не делится на $x - y$ для любых двух различных чисел x и y из T.

Например, подмножество $T = \{31, 71, 346\}$ — **непредсказуемое**, а $T = \{5, 15, 75\}$ — нет, поскольку $15 + 5 = 20$ делится на $15 - 5 = 10$.

Какое наибольшее количество чисел может содержать **непредсказуемое** подмножество?

Ответ: 677

Задача 8.1. Дан квадрат $ABCD$. Через середину стороны AB проведена прямая ℓ, пересекающая сторону BC. Известно, что расстояния от точек A и C до ℓ равны 4 и 11 соответственно. Найдите сторону квадрата $ABCD$.

Ответ: 17

Решение. Проведём через B прямую ℓ', параллельную ℓ. Пусть точки R и S — основания перпендикуляров из A, C на прямую ℓ, P и Q — основания перпендикуляров из A и C на прямую ℓ', а M — середина AB. По признаку средней линии RM — средняя линия треугольника APB, поэтому R — середина отрезка AP, то есть $PR = RA = 4$. Четырёхугольник $RPQS$ является прямоугольником, поэтому $QS = PR = 4$ и $QC = QS + SC = 4 + 11 = 15$. Заметим, что прямоугольные треугольники QBC и PAB равны по гипотенузе и острому углу. Действительно, $AB = BC$ как стороны квадрата, и $\angle QCB = \angle 90^\circ - \angle QBC = \angle PBA$. Значит, $BQ = AP = 8$. По теореме Пифагора для треугольника QBC получаем $BC = \sqrt{BQ^2 + QC^2} = \sqrt{64 + 225} = 17$. □

Задача 8.2. Дан квадрат $ABCD$. Через середину стороны AB проведена прямая ℓ, пересекающая сторону BC. Известно, что расстояния от точек A и C до ℓ равны 10 и 11 соответственно. Найдите сторону квадрата $ABCD$.

Ответ: 29

Задача 8.3. Дан квадрат $ABCD$. Через середину стороны AB проведена прямая ℓ, пересекающая сторону BC. Известно, что расстояния от точек A и C до ℓ равны 6 и 29 соответственно. Найдите сторону квадрата $ABCD$.

Ответ: 37

Задача 8.4. Дан квадрат $ABCD$. Через середину стороны AB проведена прямая ℓ, пересекающая сторону BC. Известно, что расстояния от точек A и C до ℓ равны 24 и 31 соответственно. Найдите сторону квадрата $ABCD$.

Ответ: 73

Задача 9.1. У Вани есть набор из 56 карточек с натуральными числами от 1 до 56, каждое число встречается ровно на одной карточке. Ваня хочет убрать 9 карточек так, чтобы среди оставшихся 47 карточек не нашлось двух, числа на которых отличаются ровно в 5 раз. Сколькими способами Ваня может это сделать?

Ответ: 128.

Решение. Разобьём все карточки на группы, состоящие из геометрических прогрессий со знаменателем 5. Тогда из более чем одной карточки будут состоять ровно 9 групп: 2 группы из 3 карточек $\big(\{1, 5, 25\}$ и $\{2, 10, 50\}\big)$ и 7 из двух (с начальными членами $3, 4, 6, 7, 8, 9, 11$). Заметим, что Ване необходимо убрать карточку с числом 5, поскольку в противном случае ему понадобится убрать как минимум $2 + 8 = 10 > 9$ карточек. Аналогично, Ване необходимо убрать карточку с числом 10. Из каждой из 7 оставшихся групп с двумя числами Ване нужно убрать ровно 1 карточку. Это можно сделать $2^7 = 128$ способами. □

Задача 9.2. У Вани есть набор из 61 карточки с натуральными числами от 1 до 61, каждое число встречается ровно на одной карточке. Ваня хочет убрать 10 карточек так, чтобы среди оставшихся 51 карточки не нашлось двух, числа на которых отличаются ровно в 5 раз. Сколькими способами Ваня может это сделать?

Ответ: 256.

Задача 9.3. У Вани есть набор из 66 карточек с натуральными числами от 1 до 66, каждое число встречается ровно на одной карточке. Ваня хочет убрать 11 карточек так, чтобы среди оставшихся 55 карточек не нашлось двух, числа на которых отличаются ровно в 5 раз. Сколькими способами Ваня может это сделать?

Ответ: 512.

Задача 9.4. У Вани есть набор из 71 карточки с натуральными числами от 1 до 71, каждое число встречается ровно на одной карточке. Ваня хочет убрать 12 карточек так, чтобы среди оставшихся 59 карточек не нашлось двух, числа на которых отличаются ровно в 5 раз. Сколькими способами Ваня может это сделать?

Ответ: 1024.

Задача 10.1. Петя написал на доске все возможные натуральные числа n, такие что НОД$(n,\ 10!)$ = НОК$(n,\ 5!)$. Вася для каждого числа на доске написал в тетрадку количество его делителей. Чему равняется сумма чисел в тетрадке у Васи?

Ответ: 8190

Решение. Заметим, что

$$5! \mid \text{НОК}(n, 5!) = \text{НОД}(n, 10!) \mid n,$$
$$n \mid \text{НОК}(n, 5!) = \text{НОД}(n, 10!) \mid 10!,$$

поэтому Петя выписал в точности все числа вида $5!k$, где k — делитель числа $10!/5! = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$. Иначе говоря, Петя выписывает числа вида $2^{3+a} \cdot 3^{1+b} \cdot 5^{1+c} \cdot 7^d$, где $0 \le a \le 5$, $0 \le b \le 3$, $0 \le c, d \le 1$. Количество делителей числа $2^{3+a} \cdot 3^{1+b} \cdot 5^{1+c} \cdot 7^d$ равно $(4+a)(2+b)(2+c)(1+d)$. Поскольку Петя выписал все числа такого вида, искомая сумма получится если раскрыть скобки в произведении

$$(4+5+6+7+8+9)(2+3+4+5)(2+3)(1+2),$$

которое равно 8190. □

Задача 10.2. Петя написал на доске все возможные натуральные числа n, такие что НОД$(n,\ 11!)$ = НОК$(n,\ 5!)$. Вася для каждого числа на доске написал в тетрадку количество его делителей. Чему равняется сумма чисел в тетрадке у Васи?

Ответ: 24570

Задача 10.3. Петя написал на доске все возможные натуральные числа n, такие что НОД$(n,\ 10!)$ = НОК$(n,\ 6!)$. Вася для каждого числа на доске написал в тетрадку количество его делителей. Чему равняется сумма чисел в тетрадке у Васи?

Ответ: 6300

Задача 10.4. Петя написал на доске все возможные натуральные числа n, такие что НОД$(n,\ 11!) =$ НОК$(n,\ 6!)$. Вася для каждого числа на доске написал в тетрадку количество его делителей. Чему равняется сумма чисел в тетрадке у Васи?

Ответ: 18900

Задача 11.1. В графе на 501 вершине степень каждой вершины не меньше, чем n. Для какого наименьшего n можно заведомо утверждать, что в графе найдётся полный подграф на 6 вершинах?

Ответ: 401

Решение. Пример. Разделим все вершины на 5 групп: 4 из 100 вершин и одну из 101. Проведём все рёбра между вершинами из разных групп и только их. В таком графе нет полного подграфа на 6 вершинах, поскольку среди любых 6 его вершин по принципу Дирихле найдутся две вершины из одной группы, которые не соединены ребром.

Оценка. Покажем, что если $n \geq 401$, то в графе найдётся полный подграф на 6 вершинах. Выберем произвольную вершину v_1. В графе есть не более 99 вершин, с которыми она не соединена. Выкинем их из графа. Помимо v_1, в графе осталось не меньше 401 вершины. Повторяя аналогичную процедуру (выбор вершины и выкидывание из графа вершин, не соединённых с ней) ещё 4 раза, получим искомый подграф на 6 вершинах. □

Задача 11.2. В графе на 506 вершинах степень каждой вершины не меньше, чем n. Для какого наименьшего n можно заведомо утверждать, что в графе найдётся полный подграф на 6 вершинах?

Ответ: 405

Задача 11.3. В графе на 511 вершинах степень каждой вершины не меньше, чем n. Для какого наименьшего n можно заведомо утверждать, что в графе найдётся полный подграф на 6 вершинах?

Ответ: 409

Задача 11.4. В графе на 516 вершинах степень каждой вершины не меньше, чем n. Для какого наименьшего n можно заведомо утверждать, что в графе найдётся полный подграф на 6 вершинах?

Ответ: 413

Задача 12.1. В остроугольном треугольнике ABC точки D и E являются основаниями биссектрисы и высоты, проведенной из точки A соответственно. Оказалось, что $AC - AB = 6$ и $DC - DB = 4$. Вычислите $EC - EB$.

Ответ: 9

Решение. Обозначим $AC = x$, $DC = y$. По основному свойству биссектрисы

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \iff \frac{x+6}{x} = \frac{y+4}{y} \iff \frac{x}{y} = \frac{3}{2}.$$

Пусть $x = 3a$, тогда $y = 2a$ и $BC = 4a + 4$. Пусть также $EC - EB = 2t$, тогда $EC = 2a + 2 + t$, $EB = 2a + 2 - t$. По принципу Карно

$$AB^2 - AC^2 = BE^2 - CE^2 \iff (3a+6)^2 - 9a^2 = (2a+2+t)^2 - (2a+2-t)^2,$$

откуда

$$36a + 36 = 2t \cdot (4a+4) \Longrightarrow EC - CB = 2t = 9.$$

□

Задача 12.2. В остроугольном треугольнике ABC точки D и E являются основаниями биссектрисы и высоты, проведенной из точки A соответственно. Оказалось, что $AC - AB = 12$ и $DC - DB = 8$. Вычислите $EC - EB$.

Ответ: 18

Задача 12.3. В остроугольном треугольнике ABC точки D и E являются основаниями биссектрисы и высоты, проведенной из точки A соответственно. Оказалось, что $AC - AB = 18$ и $DC - DB = 12$. Вычислите $EC - EB$.

Ответ: 27

Задача 12.4. В остроугольном треугольнике ABC точки D и E являются основаниями биссектрисы и высоты, проведенной из точки A соответственно. Оказалось, что $AC - AB = 24$ и $DC - DB = 16$. Вычислите $EC - EB$.

Ответ: 36

Задача 13.1. В турнире по настольному теннису участвуют 10 спортсменов со стартовыми номерами $1, 2, \ldots 10$. Турнир проходит по следующим правилам. Сначала игроки выстраиваются в шеренгу по возрастанию номеров слева направо. Спортсмены 1 и 2 играют первый матч. Победитель этого матча остаётся в начале шеренги, проигравший отправляется в конец шеренги. Далее каждый матч играют два спортсмена, стоящие в начале шеренги на момент начала матча. После каждого матча его победитель остаётся в начале шеренги, а проигравший отправляется в конец шеренги. Всего в турнире 1000 туров. Известно, что игрок со стартовым номером 10 за весь турнир выиграл 254 матчей. Сколько матчей он мог проиграть?

Ответ: 82.

Решение. Рассмотрим все матчи, в которых игрок с номером 10 не выиграл (то есть матчи, в которых он либо не участвовал, либо проиграл). Их ровно $1000 - 254 = 746$. Заметим, что игрок с номером 10 проигрывает в точности каждый девятый матч из рассматриваемых. Действительно, в первых восьми играх он не участвует и «продвигается» в начало шеренги, потом проигрывает одну игру, возвращается в исходное положение и снова начинает двигаться к началу шеренги. Таким образом, он проиграл ровно $\left\lfloor \frac{746}{9} \right\rfloor = 82$ матча. $\square$

Задача 13.2. В турнире по настольному теннису участвуют 10 спортсменов со стартовыми номерами $1, 2, \ldots 10$. Турнир проходит по следующим правилам. Сначала игроки выстраиваются в шеренгу по возрастанию номеров слева направо. Спортсмены 1 и 2 играют первый матч. Победитель этого матча остаётся в начале шеренги, проигравший отправляется в конец шеренги. Далее каждый матч играют два спортсмена, стоящие в начале шеренги на момент начала матча. После каждого матча его победитель остаётся в начале шеренги, а проигравший отправляется в конец шеренги. Всего в турнире 1000 туров. Известно, что игрок со стартовым номером 10 за весь турнир выиграл 263 матчей. Сколько матчей он мог проиграть?

Ответ: 81.

Задача 13.3. В турнире по настольному теннису участвуют 10 спортсменов со стартовыми номерами $1, 2, \ldots 10$. Турнир проходит по следующим правилам. Сначала игроки выстраиваются в шеренгу по возрастанию номеров слева направо. Спортсмены 1 и 2 играют первый матч. Победитель этого матча остаётся в начале шеренги, проигравший отправляется в конец шеренги. Далее каждый матч играют два спортсмена, стоящие в начале шеренги на момент начала матча. После каждого матча его победитель остаётся в начале шеренги, а проигравший отправляется в конец шеренги. Всего в турнире 1000 туров. Известно, что игрок со стартовым номером 10 за весь турнир выиграл 272 матчей. Сколько матчей он мог проиграть?

Ответ: 80.

Задача 13.4. В турнире по настольному теннису участвуют 10 спортсменов со стартовыми номерами $1, 2, \ldots 10$. Турнир проходит по следующим правилам. Сначала игроки выстраиваются в шеренгу по возрастанию номеров слева направо. Спортсмены 1 и 2 играют первый матч. Победитель этого матча остаётся в начале шеренги, проигравший отправляется в конец шеренги. Далее каждый матч играют два спортсмена, стоящие в начале шеренги на момент начала матча. После каждого матча его победитель остаётся в начале шеренги, а проигравший отправляется в конец шеренги. Всего в турнире 1000 туров. Известно, что игрок со стартовым номером 10 за весь турнир выиграл 281 матчей. Сколько матчей он мог проиграть?

Ответ: 79.

Задача 14.1. Петя назвал Васе натуральное число n. Вася для каждого делителя d числа n нашёл значение выражения $\frac{3^n-1}{3^d-1}$ и просуммировал полученные числа. Для скольких n в диапазоне $1 \leqslant n \leqslant 2000$ у Васи получится нечётное число?

Ответ: 75

Решение. Пусть $n = ab$. Тогда

$$\frac{3^n - 1}{3^a - 1} = \frac{(3^a)^b - 1}{3^a - 1} = 3^{a(b-1)} + 3^{a(b-2)} + \ldots + 3^a + 1 \equiv b \mod 2,$$

где последнее сравнение выполнено, поскольку каждое слагаемое вида 3^{ak} нечётно. Значит, сумма, которую вычислил Вася, даёт тот же остаток по модулю 2, что и сумма делителей числа n. Пусть $n = 2^a p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа n на простые множители (причём p_i нечётно для каждого i). Тогда сумма S делителей числа n равна

$$S = (2^a + 2^{a-1} + \ldots + 1)(p_1^{\alpha_1} + p_1^{\alpha_1 - 1} + \ldots + 1) \ldots (p_k^{\alpha_k} + p_k^{\alpha_k - 1} + \ldots + 1).$$

Первый сомножитель всегда нечётен, а сомножитель вида $p_j^{\alpha_j} + p_j^{\alpha_j - 1} + \ldots + 1$ нечётен тогда и только тогда, когда α_j делится на 2. Иначе говоря, найденное Васей значение нечётно тогда и только тогда, когда $n = 2^a m^2$ для некоторого целого неотрицательного $a \geq 0$ и нечётного m. При чётном a число n является точным квадратом, а при нечётном — удвоенным квадратом. И наоборот, любой квадрат и удвоенный квадрат однозначно представляется в виде $2^a m^2$ для целого неотрицательного $a \geq 0$ и нечётного m. Таким образом, в диапазоне от 1 до 2000 найдётся всего

$$\lfloor \sqrt{2000} \rfloor + \left\lfloor \sqrt{\frac{2000}{2}} \right\rfloor = 75$$

таких чисел. □

Задача 14.2. Петя назвал Васе натуральное число n. Вася для каждого делителя d числа n нашёл значение выражения $\frac{3^n - 1}{3^d - 1}$ и просуммировал полученные числа. Для скольких n в диапазоне $1 \leqslant n \leqslant 2200$ у Васи получится нечётное число?

Ответ: 79

Задача 14.3. Петя назвал Васе натуральное число n. Вася для каждого делителя d числа n нашёл значение выражения $\frac{3^n - 1}{3^d - 1}$ и просуммировал полученные числа. Для скольких n в диапазоне $1 \leqslant n \leqslant 2400$ у Васи получится нечётное число?

Ответ: 82

Задача 14.4. Петя назвал Васе натуральное число n. Вася для каждого делителя d числа n нашёл значение выражения $\frac{3^n - 1}{3^d - 1}$ и просуммировал полученные числа. Для скольких n в диапазоне $1 \leqslant n \leqslant 2600$ у Васи получится нечётное число?

Ответ: 86