Дистанционный отбор, ответы и решения

Задача 1.1. В пять 15-литровых ведер налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается выбрать два ведра и перелить из первого во второе столько воды, чтобы количество воды во втором ведре утроилось. Какое наибольшее количество литров воды можно такими действиями собрать в одном ведре?

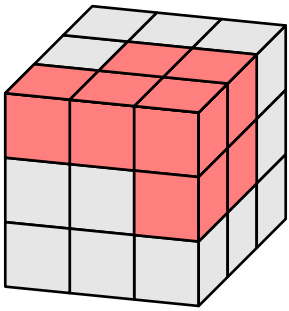
Ответ: 12.

Решение. Покажем, как собрать в одном ведре 12 литров воды:

$$(1, 2, 3, 4, 5) \to (1, 6, 3, 4, 1) \to (1, 0, 9, 4, 1) \to (1, 0, 1, 12, 1).$$

Теперь докажем от противного, что нельзя собрать в одном ведре больше 12 литров. Пусть можно; рассмотрим первый момент, когда такое ведро образовалось. В него только что долили воды, и теперь в нём кратное 3 число литров — то есть 15. Заметим, что каждый раз переливается четное количество литров воды. Значит, в каждом ведре четность количества литров воды никогда не меняется. Если бы получилось собрать 15 литров в одном ведре, то только в этом ведре стало бы нечетное количество литров воды, а в остальных — чётное (0 литров). Но в начале в трех ведрах нечетное количество литров воды. Противоречие. □

Задача 2.1. В деревянном кубе $3 \times 3 \times 3$ термиты выгрызли семь кубиков $1 \times 1 \times 1$ (те, что отмечены на рисунке), а остальные кубики не тронули. Сколько клеточек 1×1 будет на поверхности оставшейся трёхмерной клетчатой фигуры?

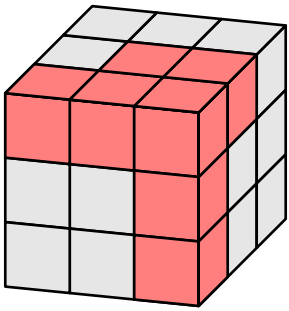


Ответ: 52.

Решение. Каждую клетку 1×1 на поверхности оставшейся трёхмерной фигуры видно ровно с одной стороны куба. Посмотрим на куб сверху. Мы увидим все 9 клеток, потому что 4 из них — начальные, а остальные — те, что на 1 или

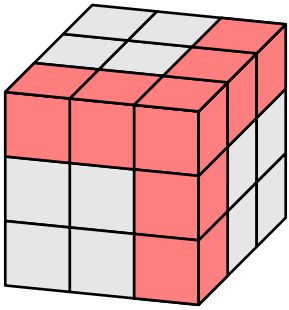
2 слоя ниже. Не увидеть клетку можно только если все 3 кубика $1 \times 1 \times 1$ в соответствующем столбце выгрызли термиты. Аналогично можно посмотреть на куб с любой из шести сторон. Слева и справа видно по 8 клеток, а с остальных 4 сторон куба видно все 9 клеток. Всего — 52. □

Задача 2.2. В деревянном кубе $3 \times 3 \times 3$ термиты выгрызли семь кубиков $1 \times 1 \times 1$ (те, что отмечены на рисунке), а остальные кубики не тронули. Сколько клеточек 1×1 будет на поверхности оставшейся трёхмерной клетчатой фигуры?



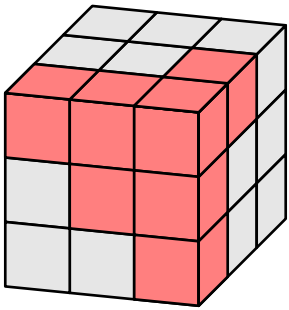
Ответ: 50.

Задача 2.3. В деревянном кубе $3 \times 3 \times 3$ термиты выгрызли семь кубиков $1 \times 1 \times 1$ (те, что отмечены на рисунке), а остальные кубики не тронули. Сколько клеточек 1×1 будет на поверхности оставшейся трёхмерной клетчатой фигуры?



Ответ: 48.

Задача 2.4. В деревянном кубе $3 \times 3 \times 3$ термиты выгрызли семь кубиков $1 \times 1 \times 1$ (те, что отмечены на рисунке), а остальные кубики не тронули. Сколько клеточек 1×1 будет на поверхности оставшейся трёхмерной клетчатой фигуры?



Ответ: 50.

Задача 3.1. На прямой сидят три точечные блохи. Изначальные попарные расстояния между ними равны 5, 12, 17. Каждую минуту одна из блох перепрыгивает через другую блоху центрально-симметрично (т. е. точка начала прыжка и точка приземления находятся одном расстоянии от блохи, через которую прыгают). Через какое наименьшее число минут попарные расстояния между блохами могут оказаться равными 8, 11, 19 (в некотором порядке)?

Ответ: 6.

Решение. В каждый момент времени будем записывать пару чисел: расстояния (a, b) от средней блохи до крайних: изначально $(5, 12)$, в конце $(8, 11)$ (порядок чисел в паре не важен). Легко убедиться, что за одну операцию текущая пара чисел (a, b) меняется на одну из пар $(a, a + b)$, $(b, a + b)$, $(|b - a|, \min(a, b))$. Заметим, что в двух возможных парах сумма чисел больше, чем была, в третьей — меньше.

Мы докажем, что есть только один способ получить из одной пары другую, не повторяясь:

$$(5, 12) \to (5, 7) \to (2, 5) \to (2, 3) \to (3, 5) \to (3, 8) \to (8, 11).$$

Рассмотрим граф, вершины которого — пары чисел, а рёбрами соединяем каждую пару чисел (a, b) с парами $(a, a + b)$, $(b, a + b)$, $(|b - a|, \min(a, b))$. Всё дело в этом, что в это графе нет циклов. Действительно, если бы был цикл, то тогда у вершины с наибольшей суммой $a+b$ в этом цикле было бы две различные смежные вершины с меньшей суммой, что невозможно. В графе без циклов может быть не более одного пути $(5, 12) \to (8, 11)$ без повторяющихся вершин.

□

Задача 3,2. На прямой сидят три точечные блохи. Изначальные попарные расстояния между ними равны 7, 12, 19. Каждую минуту одна из блох перепрыгивает через другую блоху центрально-симметрично (т. е. точка начала прыжка и

точка приземления находятся одном расстоянии от блохи, через которую прыгают). Через какое наименьшее число минут попарные расстояния между блохами могут оказаться равными 3, 11, 14 (в некотором порядке)?

Ответ: 6.

Задача 3.3. На прямой сидят три точечные блохи. Изначальные попарные расстояния между ними равны 7, 10, 17. Каждую минуту одна из блох перепрыгивает через другую блоху центрально-симметрично (т. е. точка начала прыжка и точка приземления находятся одном расстоянии от блохи, через которую прыгают). Через какое наименьшее число минут попарные расстояния между блохами могут оказаться равными 5, 6, 11 (в некотором порядке)?

Ответ: 6.

Задача 3.4. На прямой сидят три точечные блохи. Изначальные попарные расстояния между ними равны 3, 10, 13. Каждую минуту одна из блох перепрыгивает через другую блоху центрально-симметрично (т. е. точка начала прыжка и точка приземления находятся одном расстоянии от блохи, через которую прыгают). Через какое наименьшее число минут попарные расстояния между блохами могут оказаться равными 5, 9, 14 (в некотором порядке)?

Ответ: 6.

Задача 4.1. Петя выписал в ряд в порядке возрастания все натуральные числа, сумма цифр которых делится на 7:

$$7, 16, 25, 34, 43, 52, 59, 61, 68, \ldots$$

Чему равна наибольшая разность между соседними выписанными числами?

Ответ: 13.

Решение. Следующий факт верен: среди любых семи подряд идущих чисел в одном десятке есть ровно одно с суммой цифр, делящейся на 7 (числа находятся в одном десятке, если они отличаются лишь последней цифрой).
Рассмотрим пару соседних выписанных Петей чисел — $n, m, n < m$. В соответствии с фактом, есть 2 случая:
1) m в том же десятке, что и n. В этом случае $m - n = 7$.
2) m не в том же десятке, что и n. Тогда m точно в следующем десятке после n. Последняя цифра n лежит в множестве $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, последняя цифра m лежит в множестве $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Значит, последняя цифра числа n хотя бы 3, последняя цифра числа m не больше 6 и тогда $m - n \leqslant 13$. То есть, ответ на вопрос задачи не превышает 13.
Теперь покажем два соседних выписанных Петей числа с разностью 13. Например, подойдут числа 7993 и 8006. □

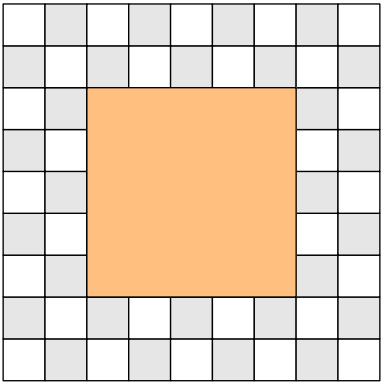
Задача 4.2. Петя выписал в ряд в порядке возрастания все натуральные числа, сумма цифр которых делится на 8:

$$8, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 79, \ldots$$

Чему равна наибольшая разность между соседними выписанными числами?

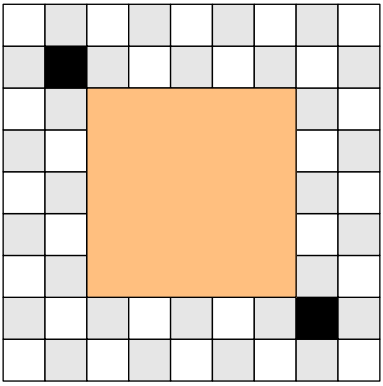
Ответ: 15.

Задача 5.1. Центр клетчатой доски, изображённой на рисунке, заполнен лавой. Хромая ладья за один ход может переместиться на одну клетку вправо либо на одну клетку вверх. Сколькими способами можно добраться хромой ладьёй из левого-нижнего угла в правый-верхний, не заползая в лаву?



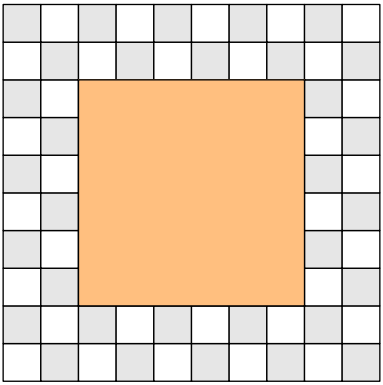
Ответ: 130.

Решение. Определим путь (ладьи) как последовательность ходов ладьи из левого-нижнего угла в правый-верхний, не пересекающий лаву.



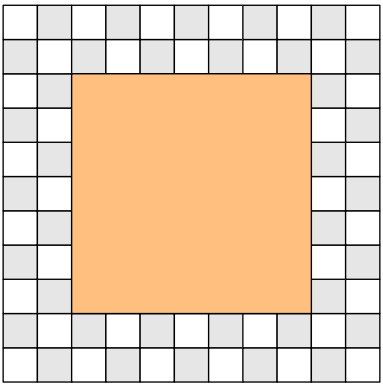
Понятно, что все (кроме двух) пути проходят через ровно одну из двух закрашенных черным на рисунке сверху клеток. Два пути, что через них не проходят — это пути по левому столбику/верхней строке и симметричный ему. Рассмотрим, как устроены пути, проходящие через левую-верхнюю черную клетку. Ладья сначала доходит из левого-нижнего угла до левой-верхней черной клетки. Это можно сделать 8 способами — ладья все ходы, кроме одного направо (который как раз можно сделать на любой строке до последней), делает вверх. Потом ладья доходит из левой-верхней черной клетки до правой-верхней клетки. Аналогично (с точностью до замены верха на право и наоборот), это можно сделать тоже 8 способами. Значит, всего путей, проходящих через левую-верхнюю черную клетку $8 \cdot 8 = 64$. Аналогично, столько же путей и через правую-нижнюю черную клетку. Значит, всего путей $64 + 64 + 2 = 130$. □

Задача 5.2. Центр клетчатой доски, изображённой на рисунке, заполнен лавой. Хромая ладья за один ход может переместиться на одну клетку вправо либо на одну клетку вверх. Сколькими способами можно добраться хромой ладьёй из левого-нижнего угла в правый-верхний, не заползая в лаву?



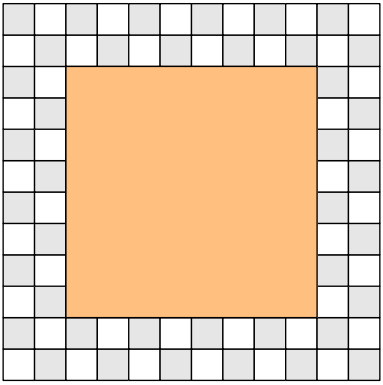
Ответ: 164.

Задача 5.3. Центр клетчатой доски, изображённой на рисунке, заполнен лавой. Хромая ладья за один ход может переместиться на одну клетку вправо либо на одну клетку вверх. Сколькими способами можно добраться хромой ладьёй из левого-нижнего угла в правый-верхний, не заползая в лаву?



Ответ: 202.

Задача 5.4. Центр клетчатой доски, изображённой на рисунке, заполнен лавой. Хромая ладья за один ход может переместиться на одну клетку вправо либо на одну клетку вверх. Сколькими способами можно добраться хромой ладьёй из левого-нижнего угла в правый-верхний, не заползая в лаву?



Ответ: 244.

Задача 6.1. Алла, Борис, Вера и Гена пришли в пиццерию и заказали 4 разные пиццы (каждый — свою). Официант запомнил три факта:
• Алла заказала то ли мясную, то ли куриную.
• Борис заказал то ли мясную, то ли гавайскую.
• Сырную пиццу заказала то ли Алла, то ли Вера.
Когда официант подавал пиццы к столу, выяснилось, что ровно один из фактов неверен. Ребята указали официанту, какой именно факт неверен, и официант смог однозначно восстановить, кто какую пиццу заказал. Кто какую пиццу заказал?

Ответ: Алла — мясную, Борис — куриную, Вера — сырную, Гена — гавайскую.

Решение. Пусть неверен первый факт. Тогда официант не мог однозначно восстановить, кто какую пиццу заказал, потому что возможны как минимум два следующих вариантов заказов:
1) Алла — гавайскую, Борис — мясную, Вера — сырную, Гена — куриную.
2) Алла — сырную, Борис — мясную, Вера — куриную, Гена — гавайскую.
Пусть неверен третий факт. Тогда официант не мог однозначно восстановить, кто какую пиццу заказал, потому что возможны как минимум два следующих вариантов заказов:
1) Алла — куриную, Борис — мясную, Вера — гавайскую, Гена — сырную.
2) Алла — куриную, Борис — гавайскую, Вера — мясную, Гена — сырную.
Значит, неверен второй факт. Тогда из первого и третьего факта следует, что сырную пиццу могла заказать только Вера. Из этого факта, а также того, что второй факт неверен, следует, что Борис заказал куриную. Значит, Алла заказала мясную. И Гена заказал гавайскую. □

Задача 6.2. Алла, Борис, Вера и Гена пришли в пиццерию и заказали 4 разные пиццы (каждый — свою). Официант запомнил три факта:
• Алла заказала то ли сырную, то ли мясную.
• Борис заказал то ли сырную, то ли куриную.
• Гавайскую пиццу заказала то ли Алла, то ли Вера.
Когда официант подавал пиццы к столу, выяснилось, что ровно один из фактов неверен. Ребята указали официанту, какой именно факт неверен, и официант смог однозначно восстановить, кто какую пиццу заказал. Кто какую пиццу заказал?

Ответ: Алла — сырную, Борис — мясную, Вера — гавайскую, Гена — куриную.

Задача 6.3. Алла, Борис, Вера и Гена пришли в пиццерию и заказали 4 разные пиццы (каждый — свою). Официант запомнил три факта:
• Алла заказала то ли гавайскую, то ли сырную.
• Борис заказал то ли гавайскую, то ли мясную.
• Куриную пиццу заказала то ли Алла, то ли Вера.
Когда официант подавал пиццы к столу, выяснилось, что ровно один из фактов неверен. Ребята указали официанту, какой именно факт неверен, и официант смог однозначно восстановить, кто какую пиццу заказал. Кто какую пиццу заказал?

Ответ: Алла — гавайскую, Борис — сырную, Вера — куриную, Гена — мясную.

Задача 6.4. Алла, Борис, Вера и Гена пришли в пиццерию и заказали 4 разные пиццы (каждый — свою). Официант запомнил три факта:
• Алла заказала то ли куриную, то ли гавайскую.
• Борис заказал то ли куриную, то ли сырную.

• Мясную пиццу заказала то ли Алла, то ли Вера.

Когда официант подавал пиццы к столу, выяснилось, что ровно один из фактов неверен. Ребята указали официанту, какой именно факт неверен, и официант смог однозначно восстановить, кто какую пиццу заказал. Кто какую пиццу заказал?

Ответ: Алла — куриную, Борис — гавайскую, Вера — мясную, Гена — сырную.

Задача 7.1. На кольцевом катке (в форме окружности) из одной точки одновременно в противоположных направлениях стартуют Дед Мороз и Снегурочка. Они двигаются с постоянными скоростями; Снегурочка проезжает каток за 35 секунд, а Дед Мороз — в 2.5 раза быстрее. Когда Снегурочка приближается к Деду Морозу, она радуется, а когда отдаляется от него — печалится и заливает слезами лёд (Снегурочка оценивает расстояние как длину отрезка между ними). Сколько секунд пройдёт от начала движения до момента, когда Снегурочка зальёт слезами весь каток?

Ответ: 65.

Решение. Разобьем окружность катка на 7 равных дуг, где одна из точек разбиения — место старта. Пока Снегурочка проезжает две дуги, Дед Мороз, двигаясь в 2.5 раза быстрее, проезжает 5 остальных дуг, и они вновь встречаются. Ясно, что первую половину этого интервала времени Снегурочка плачет, вторую — радуется.

Пронумеруем дуги по направлению движения Снегурочки. Получается, что Снегурочка последовательно покроет слезами семь дуг с номерами 1, 3, 5, 7, 2, 4, 6; между этими дугами Снегурочка проедет ещё шесть дуг без слёз. Всего получится 13 дуг. Каждую дугу Снегурочка проезжает за $35/7 = 5$ секунд, и суммарное затраченное время составит $13 \cdot (35/7) = 65$ секунд.

□

Задача 7.2. На кольцевом катке (в форме окружности) из одной точки одновременно в противоположных направлениях стартуют Дед Мороз и Снегурочка. Они двигаются с постоянными скоростями; Снегурочка проезжает каток за 42 секунды, а Дед Мороз — в 2.5 раза быстрее. Когда Снегурочка приближается к Деду Морозу, она радуется, а когда отдаляется от него — печалится и заливает слезами лёд (Снегурочка оценивает расстояние как длину отрезка между ними). Сколько секунд пройдёт от начала движения до момента, когда Снегурочка зальёт слезами весь каток?

Ответ: 78.

Задача 7.3. На кольцевом катке (в форме окружности) из одной точки одновременно в противоположных направлениях стартуют Дед Мороз и Снегурочка.

Они двигаются с постоянными скоростями; Снегурочка проезжает каток за 49 секунд, а Дед Мороз — в 2.5 раза быстрее. Когда Снегурочка приближается к Деду Морозу, она радуется, а когда отдаляется от него — печалится и заливает слезами лёд (Снегурочка оценивает расстояние как длину отрезка между ними). Сколько секунд пройдёт от начала движения до момента, когда Снегурочка зальёт слезами весь каток?

Ответ: 91.

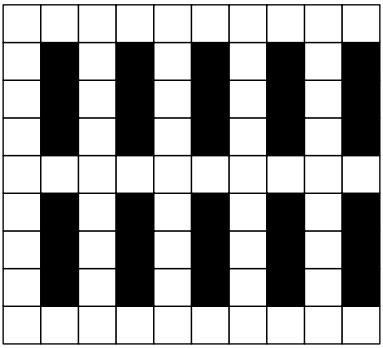
Задача 7.4. На кольцевом катке (в форме окружности) из одной точки одновременно в противоположных направлениях стартуют Дед Мороз и Снегурочка. Они двигаются с постоянными скоростями; Снегурочка проезжает каток за 28 секунд, а Дед Мороз — в 2.5 раза быстрее. Когда Снегурочка приближается к Деду Морозу, она радуется, а когда отдаляется от него — печалится и заливает слезами лёд (Снегурочка оценивает расстояние как длину отрезка между ними). Сколько секунд пройдёт от начала движения до момента, когда Снегурочка зальёт слезами весь каток?

Ответ: 52.

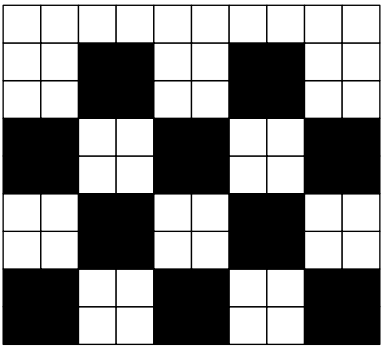
Задача 8.1. Какое наименьшее количество прямоугольников 1×3 (либо 3×1) нужно вырезать по клеточкам из доски 10×9 так, чтобы в любом клетчатом квадрате 2×2 хотя бы одна клеточка оказалась вырезанной?

Ответ: 10.

Решение. На рисунке снизу показано, что 10 прямоугольников достаточно.



На рисунке снизу 10 черных квадратов 2×2 такие, что любой прямоугольник 1×3 (либо 3×1) по клеточкам доски пересекается не более, чем с 1 черным квадратом. Значит, нужно хотя бы 10 прямоугольников.



□

Задача 8.2. Какое наименьшее количество прямоугольников 1×3 (либо 3×1) нужно вырезать по клеточкам из доски 12×9 так, чтобы в любом клетчатом квадрате 2×2 хотя бы одна клеточка оказалась вырезанной?

Ответ: 12.

Задача 8.3. Какое наименьшее количество прямоугольников 1×3 (либо 3×1) нужно вырезать по клеточкам из доски 14×9 так, чтобы в любом клетчатом квадрате 2×2 хотя бы одна клеточка оказалась вырезанной?

Ответ: 14.

Задача 9.1. Найдите наименьшее натуральное число, не кратное двум, среди делителей которого есть такие четыре, ни один из которых не делится на наибольший общий делитель трёх других.

Ответ: 1155.

Решение. Пусть натуральное число n удовлетворяет условию. Обозначим четыре указанных в условии делителя за a, b, c, d.

Раз a не делится на НОД(b, c, d), то есть такой простой множитель p_a, который входит в разложение числа a в строго меньшей степени, чем в разложения чисел b, c, d. Аналогично можно найти соответствующие p_b, p_c, p_d простые множители для чисел b, c, d. Ясно, что эти четыре простых множителя различны.

Получается, что у n есть хотя бы 4 различных простых делителя. Наименьшее число с хотя бы 4 различными простыми делителями, ни один из которых не равен 2, — это $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155$. В качестве требуемой четверки делителей можно взять следующие числа: $3 \cdot 5 \cdot 7$, $3 \cdot 5 \cdot 11$, $3 \cdot 7 \cdot 11$, $5 \cdot 7 \cdot 11$. □

Задача 9.2. Найдите наименьшее натуральное число, не кратное трём, среди делителей которого есть такие четыре, ни один из которых не делится на наибольший общий делитель трёх других.

Ответ: 770.

Задача 9.3. Найдите наименьшее натуральное число, не кратное пяти, среди делителей которого есть такие четыре, ни один из которых не делится на наибольший общий делитель трёх других.

Ответ: 462.

Задача 9.4. Найдите наименьшее натуральное число, не кратное семи, среди делителей которого есть такие четыре, ни один из которых не делится на наибольший общий делитель трёх других.

Ответ: 330.

Задача 10.1. Несколько (больше двух) шариков двух цветов — красного и синего — расположены по кругу. Каждый ход все шарики, оба соседа которых того же цвета, что и сам шарик, одновременно меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались ровно 30 ходов, после чего прекратились (иными словами, в каждый из первых 30 ходов хотя бы один шарик менял свой цвет, а на 31-ый ход ни один из шариков не перекрасился). Какое наименьшее количество шариков могло быть в круге?

Ответ: 62.

Решение. Наблюдение: если после какого-то хода (или перед первым ходом) рядом стоят два разноцветных шарика, то оба эти шарика никогда более не перекрашиваются. Значит, можно разбить весь круг шариков на чередующиеся по цвету дуги подряд идущих одноцветных шариков и смотреть, что происходит в каждой из них независимо друг от друга (так как граничные шары этих дуг не меняются по наблюдению).

Посмотрим на какую-нибудь такую дугу. Пусть в дуге x шаров красного цвета. Если x равно 1 или 2, то эта дуга никогда больше не поменяется. Если же $x > 2$, то после первого хода $x - 2$ шарика (все кроме граничных) поменяют свой цвет на синий, получится дуга из $x - 2$ синих шаров. Следуя так далее по ходам, получим, что дуга из x шаров одного цвета перестанет меняться ровно через $\left[\dfrac{x-1}{2}\right]$ ходов.

Теперь вернемся к задаче. Чтобы ходов было конечное число, нужно, чтобы были шары обоих цветов. Чтобы было ровно 30 ходов, нужно, чтобы (1) была

дуга из хотя бы 61 одноцветных шаров, (2) не было дуг из 63 и более одноцветных шаров, и (3) были шары обоих цветов. Значит, нужно как минимум 61 шар одного цвета и 1 второго, то есть 62 шара.

Если расставить 61 шар синего и 1 шар красного цвета по кругу, то будет сделано ровно 30 ходов. □

Задача 10.2. Несколько (больше двух) шариков двух цветов — красного и синего — расположены по кругу. Каждый ход все шарики, оба соседа которых того же цвета, что и сам шарик, одновременно меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались ровно 35 ходов, после чего прекратились (иными словами, в каждый из первых 35 ходов хотя бы один шарик менял свой цвет, а на 36-ой ход ни один из шариков не перекрасился). Какое наименьшее количество шариков могло быть в круге?

Ответ: 72.

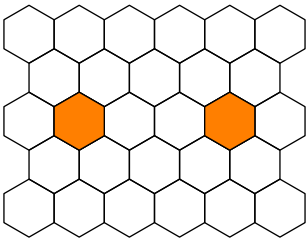
Задача 10.3. Несколько (больше двух) шариков двух цветов — красного и синего — расположены по кругу. Каждый ход все шарики, оба соседа которых того же цвета, что и сам шарик, одновременно меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались ровно 40 ходов, после чего прекратились (иными словами, в каждый из первых 40 ходов хотя бы один шарик менял свой цвет, а на 41-ый ход ни один из шариков не перекрасился). Какое наименьшее количество шариков могло быть в круге?

Ответ: 82.

Задача 10.4. Несколько (больше двух) шариков двух цветов — красного и синего — расположены по кругу. Каждый ход все шарики, оба соседа которых того же цвета, что и сам шарик, одновременно меняют свой цвет. Известно, что перекрашивания продолжались ровно 45 ходов, после чего прекратились (иными словами, в каждый из первых 45 ходов хотя бы один шарик менял свой цвет, а на 46-ой ход ни один из шариков не перекрасился). Какое наименьшее количество шариков могло быть в круге?

Ответ: 92.

Задача 11.1. В бесконечной шестиугольной решётке изначально два шестиугольника заполнены мёдом (те, что показаны на рисунке). Каждую минуту прилетают пчёлки и одновременно заполняют мёдом те незаполненные шестиугольники, которые граничат по стороне с хотя бы одним уже заполненным. Сколько шестиугольников окажутся заполненными через 10 минут?



Ответ: 394.

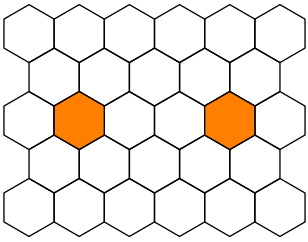
Решение. Для начала решим задачу в случае, если изначально заполнена лишь одна сота. Через одну минуту заполнятся 6 сот вокруг, через две минуты — 12, через три минуты — 18, ..., через десять минут — 6×10. Всего заполнится $1 + 6 \cdot (1 + 2 + \ldots + 10) = 331$ шестиугольник. Множество заполненных сот будет представлять собой шестиугольник со стороной 11.

Легко понять, что в случае двух изначально заполненных сот через 10 минут будет заполнено объединение двух шестиугольников со стороной 11 с центрами в изначальных сотах. Осталось посчитать количество сот в их объединении.

Один шестиугольник отличается от другого сдвигом на 3 по горизонтали. При сдвиге на 1 у шестиугольника вылазят наружу все соты, примыкающие к двум боковым сторонам; таких сот $2 \cdot 11 - 1 = 21$. Тогда при сдвиге на 3 дозаполнятся $3 \cdot 21 = 63$ сот. Финальный ответ: $1 + 6 \cdot (1 + 2 + \ldots + 10) + (2 \cdot 11 - 1) \cdot 3 = 394$.

□

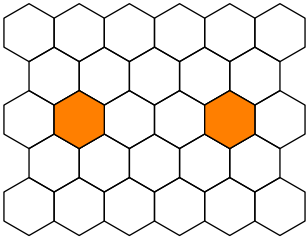
Задача 11.2. В бесконечной шестиугольной решётке изначально два шестиугольника заполнены мёдом (те, что показаны на рисунке). Каждую минуту прилетают пчёлки и одновременно заполняют мёдом те незаполненные шестиугольники, которые граничат по стороне с хотя бы одним уже заполненным. Сколько шестиугольников окажутся заполненными через 11 минут?



Ответ: 466.

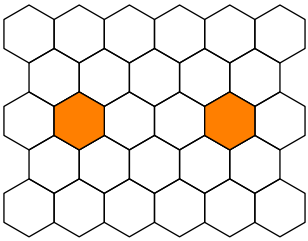
Задача 11.3. В бесконечной шестиугольной решётке изначально два шестиугольника заполнены мёдом (те, что показаны на рисунке). Каждую минуту

прилетают пчёлки и одновременно заполняют мёдом те незаполненные шестиугольники, которые граничат по стороне с хотя бы одним уже заполненным. Сколько шестиугольников окажутся заполненными через 12 минут?



Ответ: 544.

Задача 11.4. В бесконечной шестиугольной решётке изначально два шестиугольника заполнены мёдом (те, что показаны на рисунке). Каждую минуту прилетают пчёлки и одновременно заполняют мёдом те незаполненные шестиугольники, которые граничат по стороне с хотя бы одним уже заполненным. Сколько шестиугольников окажутся заполненными через 13 минут?

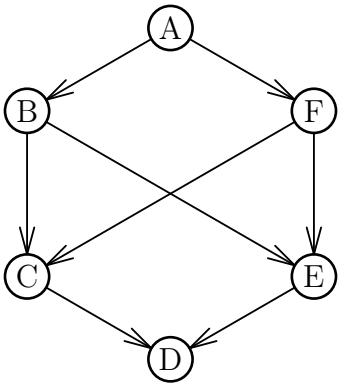


Ответ: 628.

Задача 12.1. Перед вами транспортная схема. На схеме есть восемь стрелок, и у каждой стрелки есть своя цена перемещения (у разных стрелок — разные цены). Эти цены в некотором порядке равны

$$10, 25, 50, 100, 250, 500, 1000, 2000.$$

Определите наименьшее значение x такое, что при любой расстановке цен по стрелкам будет существовать путь из пункта A в пункт D по стрелкам с суммой цен не более x.



Ответ: 1350.

Решение. Наблюдение: для любой выбранной цены сумма всех меньших цен меньше выбранной цены.

Покажем, что при любой расстановке цен по стрелкам будет существовать путь из пункта A в пункт D по стрелкам (далее — путь) с суммой цен не более $1000+250+100 = 1350$. Рассмотрим произвольную расстановку цен по стрелкам. Из схемы понятно, что при любом положении стрелки с ценой 2000 есть путь не по ней. Значит, по наблюдению, путь с наименьшей суммой цен — один из путей не по стрелке с ценой 2000. Есть с точностью до симметрии 3 (так как стрелки BE, BC, FE, FC все симметричны друг другу) возможных вариантов для стрелки с ценой 2000:

1) Стрелка AB. В этом случае путь с наименьшей суммой цен — это либо путь $AFCD$, либо путь $AFED$. Эти пути имеют лишь одну общую стрелку — AF. Значит, не может быть такого, чтобы оба эти пути содержали и стрелку ценой 1000, и стрелку ценой 500. Пусть одну из этих стрелок не содержит путь $AFCD$. Тогда наибольшая возможная сумма цен стрелок на этом пути равна $1000+250+100 = 1350$. Значит, существует путь с суммой цен не более 1350.

2) Стрелка CD. В этом случае путь с наименьшей суммой цен — это либо путь $AFED$, либо путь $ABED$. Эти пути имеют лишь одну общую стрелку — ED. Значит, не может быть такого, чтобы оба эти пути содержали и стрелку ценой 1000, и стрелку ценой 500. Пусть одну из этих стрелок не содержит путь $AFED$. Тогда наибольшая возможная сумма цен стрелок на этом пути равна $1000+250+100 = 1350$. Значит, существует путь с суммой цен не более 1350.

3) Стрелка BC. В этом случае путь с наименьшей суммой цен — это либо путь $AFCD$, либо путь $AFED$, либо путь $ABED$. Рассмотрим лишь первых два пути, а про третий забудем. Повторяя слово в слово рассуждение случая 1, получим, что существует путь с суммой цен не более 1350.

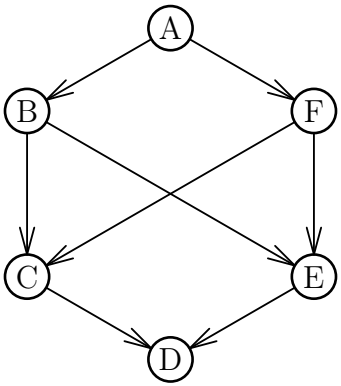
Значит, при любой расстановке цен по стрелкам будет существовать путь с суммой цен не более 1350.

Вот пример расстановки цен, при которой любой путь таков, что сумма цен его стрелок не меньше 1350: (стрелка — цена стрелки) $AB - 2000, AF - 1000, BC - 10, BE - 25, FE - 250, FC - 500, CD - 50, ED - 100$. □

Задача 12.2. Перед вами транспортная схема. На схеме есть восемь стрелок, и у каждой стрелки есть своя цена перемещения (у разных стрелок — разные цены). Эти цены в некотором порядке равны

$$10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000.$$

Определите наименьшее значение x такое, что при любой расстановке цен по стрелкам будет существовать путь из пункта A в пункт D по стрелкам с суммой цен не более x.

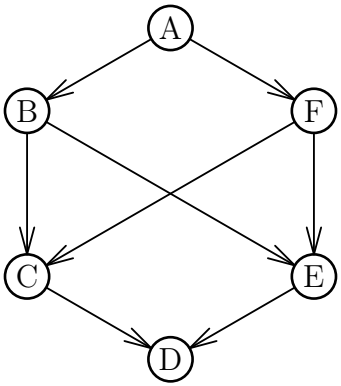


Ответ: 1300.

Задача 12.3. Перед вами транспортная схема. На схеме есть восемь стрелок, и у каждой стрелки есть своя цена перемещения (у разных стрелок — разные цены). Эти цены в некотором порядке равны

$$10, 20, 40, 80, 200, 400, 800, 2000.$$

Определите наименьшее значение x такое, что при любой расстановке цен по стрелкам будет существовать путь из пункта A в пункт D по стрелкам с суммой цен не более x.

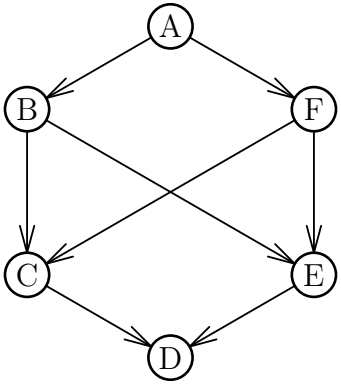


Ответ: 1080.

Задача 12.4. Перед вами транспортная схема. На схеме есть восемь стрелок, и у каждой стрелки есть своя цена перемещения (у разных стрелок — разные цены). Эти цены в некотором порядке равны

$$10, 20, 40, 100, 200, 400, 800, 2000.$$

Определите наименьшее значение x такое, что при любой расстановке цен по стрелкам будет существовать путь из пункта A в пункт D по стрелкам с суммой цен не более x.



Ответ: 1100.