

Дистанционный тур, решения

- 1.1. На доске написано несколько действительных чисел. Каждое из чисел принадлежит отрезку $[0, 2]$, а сумма всех чисел равна 5. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов этих чисел?

Ответ: 9.

Решение. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — числа, написанные на доске. Покажем, что их сумма квадратов не превосходит 9, а именно, покажем, что набор из n чисел $(2, 2, 1, 0, \dots, 0)$ имеет не меньшую сумму квадратов. Рассмотрим два произвольных числа с доски $a \geq b$. Заметим, что для любого положительного числа ε пара $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ имеет большую сумму квадратов. В самом деле,

$$(a + \varepsilon)^2 + (b - \varepsilon)^2 = a^2 + b^2 + 2\varepsilon(a - b) + \varepsilon^2 > a^2 + b^2.$$

Тогда, стерев с доски числа a и b и написав вместо них $a + \varepsilon, b - \varepsilon$, мы увеличим сумму квадратов чисел, написанных на доске. При этом их сумма останется равной 5, и нам лишь нужно подобрать ε так, чтобы $a + \varepsilon, b - \varepsilon \in [0, 2]$. Легко видеть, что если $a \neq 2$ и $b \neq 0$, то такое ε найдётся, при этом всегда можно дополнительно добиться $a + \varepsilon = 2$ или $b - \varepsilon = 0$. Значит, в результате проведённой операции мы увеличили сумму квадратов всех чисел и увеличили хотя бы на 1 суммарное число двоек и нулей в наборе. Как уже было сказано, операцию можно продолжать до тех пор, пока в наборе есть два числа, отличные от 2 и 0. Тогда после нескольких (возможно, 0) повторений операции мы получим на доске набор $(2, 2, 1, 0, \dots, 0)$, а поскольку при наших действиях сумма квадратов увеличивалась, мы доказали, что исходно она не превосходила 9.

- 1.2. На доске написано несколько действительных чисел. Каждое из чисел принадлежит отрезку $[0, 2]$, а сумма всех чисел равна 7. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов этих чисел?

Ответ: 13.

- 1.3. На доске написано несколько действительных чисел. Каждое из чисел принадлежит отрезку $[0, 2]$, а сумма всех чисел равна 9. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов этих чисел?

Ответ: 17.

- 1.4. На доске написано несколько действительных чисел. Каждое из чисел принадлежит отрезку $[0, 2]$, а сумма всех чисел равна 11. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов этих чисел?

Ответ: 21.

- 2.1.** У Алёны есть шоколадки и мармеладки. Каждую минуту она съедает либо шоколадку, либо мармеладку, после чего записывает в тетрадь два числа: коричневым карандашом количество съеденных шоколадок и жёлтым карандашом количество съеденных мармеладок. В заключительную минуту она записала коричневое число 20 и жёлтое число 30. Оказалось, что в этот момент сумма записанных коричневых чисел равна 471. А чему равна сумма записанных жёлтых чисел?

Ответ: 804.

Решение. Поместим рядом с Алёной девочку Катю. Пусть каждую минуту после того, как Алёна записывает коричневое число a и жёлтое число b , Катя записывает в свой блокнот число $a + b$. Тогда ясно, что сумма всех чисел в тетради Алёны (и жёлтых, и коричневых) равна сумме всех чисел в блокноте Кати. Таким образом, искомая сумма жёлтых чисел равна $S - 471$, где S — сумма чисел Кати.

Если Алёна на i -ой минуте записала числа a и b , то на следующей минуте она запишет либо числа $a + 1$ и b , либо числа a и $b + 1$. Тогда на i -ой минуте Катя запишет к себе в блокнот $a + b$, а на $(i + 1)$ -ой минуте запишет $a + b + 1$. Мы заключаем, что число, записанное Катей на каждой следующей минуте, на 1 больше числа, записанного ей на предыдущей минуте. Значит, в заключительную минуту в её блокноте окажутся числа $1, 2, \dots, 50$ (раз Алёна съела $20 + 30 = 50$ сладостей, заключительная минута — пятидесятая). Тогда сумма всех чисел Кати равна 1275, откуда мы находим сумму жёлтых чисел равной 804.

- 2.2.** У Алёны есть шоколадки и мармеладки. Каждую минуту она съедает либо шоколадку, либо мармеладку, после чего записывает в тетрадь два числа: коричневым карандашом количество съеденных шоколадок и жёлтым карандашом количество съеденных мармеладок. В заключительную минуту она записала коричневое число 20 и жёлтое число 30. Оказалось, что в этот момент сумма записанных коричневых чисел равна 482. А чему равна сумма записанных жёлтых чисел?

Ответ: 793.

- 2.3.** У Алёны есть шоколадки и мармеладки. Каждую минуту она съедает либо шоколадку, либо мармеладку, после чего записывает в тетрадь два числа: коричневым карандашом количество съеденных шоколадок и жёлтым карандашом количество съеденных мармеладок. В заключительную минуту она записала коричневое число 20 и жёлтое число 30. Оказалось, что в этот момент сумма записанных коричневых чисел равна 493. А чему равна сумма записанных жёлтых чисел?

Ответ: 782.

- 2.4.** У Алёны есть шоколадки и мармеладки. Каждую минуту она съедает либо шоколадку, либо мармеладку, после чего записывает в тетрадь два числа:

коричневым карандашом количество съеденных шоколадок и жёлтым карандашом количество съеденных мармеладок. В заключительную минуту она записала коричневое число 20 и жёлтое число 30. Оказалось, что в этот момент сумма записанных коричневых чисел равна 594. А чему равна сумма записанных жёлтых чисел?

Ответ: 681.

- 3.1.** В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогой. Известно, что есть два города, не соединённые дорогой, и не существует трёх городов, суммарное количество дорог между которыми равно двум. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

Ответ: 4851.

Решение. Пусть города A и B не соединены дорогой. Рассмотрим произвольный город C , отличный от A и B . Из условия следует, что C не может быть соединён одновременно и с A , и с B , то есть хотя бы одна из пар городов A, C или B, C не соединена дорогой. Рассмотрев в качестве C все отличные от A, B города, увидим, что в стране есть хотя бы 98 пар городов, не соединённых дорогой. Добавив к ним пару A, B получим 99 таких пар. Всего в стране $\frac{100 \cdot 99}{2}$ пар городов, значит, дорог не более $\frac{100 \cdot 99}{2} - 99 = 98 \cdot 99 / 2 = 4851$.

Построим пример страны, удовлетворяющей условию и имеющей 4851 дорог. Выделим один город (столицу) и скажем, что он не соединён дорогой ни с каким другим городом, а любые два нестоличных города соединены дорогой. Тогда дорог столько же, сколько пар нестоличных городов, то есть $\frac{98 \cdot 99}{2} = 4851$. При этом любые три нестоличных города соединены тремя дорогами, а между столицей и двумя нестоличными городами дорога ровно одна.

- 3.2.** В стране 200 городов, некоторые пары городов соединены дорогой. Известно, что есть два города, не соединённые дорогой, и не существует трёх городов, суммарное количество дорог между которыми равно двум. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

Ответ: 19701.

- 3.3.** В стране 50 городов, некоторые пары городов соединены дорогой. Известно, что есть два города, не соединённые дорогой, и не существует трёх городов, суммарное количество дорог между которыми равно двум. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

Ответ: 1176.

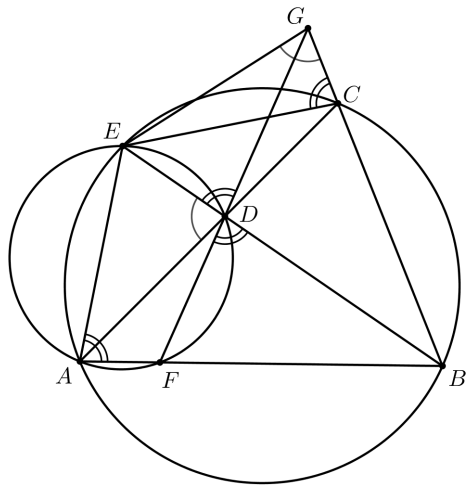
- 3.4.** В стране 150 городов, некоторые пары городов соединены дорогой. Известно, что есть два города, не соединённые дорогой, и не существует трёх городов, суммарное количество дорог между которыми равно двум. Какое наибольшее количество дорог может быть в этой стране?

Ответ: 11026.

- 4.1. Треугольник ABC вписан в окружность ω . Известно, что $\angle A = 59^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ и $\angle C = 61^\circ$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D , а ω — в точках B и E . Описанная окружность треугольника ADE пересекает прямую AB в точках A и F . Прямые DF и BC пересекаются в точке G . Найдите $\angle BGE$.

Ответ: 89° .

Решение. Заметим, что угол ECG равен углу EAB (из вписанности четырёхугольника $ABCE$), а тот в свою очередь равен углу FDB из вписанности $EDFA$. Но углы FDB и EDG равны как вертикальные, так что получаем равенство $\angle ECG = \angle EDG$, которое даёт нам вписанность четырёхугольника $EDCG$. Из этой вписанности следует равенство углов BGE и EDA . Тогда искомый угол равен $\angle EDA = \angle DBA + \angle DAB = 30^\circ + 59^\circ = 89^\circ$.



- 4.2. Треугольник ABC вписан в окружность ω . Известно, что $\angle A = 61^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ и $\angle C = 59^\circ$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D , а ω — в точках B и E . Описанная окружность треугольника ADE пересекает прямую AB в точках A и F . Прямые DF и BC пересекаются в точке G . Найдите $\angle BGE$.

Ответ: 91° .

- 4.3. Треугольник ABC вписан в окружность ω . Известно, что $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ и $\angle C = 65^\circ$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D , а ω — в точках B и E . Описанная окружность треугольника ADE пересекает прямую AB в точках A и F . Прямые DF и BC пересекаются в точке G . Найдите $\angle BGE$.

Ответ: 85° .

- 4.4. Треугольник ABC вписан в окружность ω . Известно, что $\angle A = 65^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ и $\angle C = 55^\circ$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D , а ω — в точках B и E . Описанная окружность треугольника ADE пересекает прямую AB в точках A и F . Прямые DF и BC пересекаются в точке G . Найдите $\angle BGE$.

Ответ: 95° .

- 5.1. По кругу сидят 100 человек, каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Они решили провести 100 раундов общения. В первом раунде каждый человек спрашивает у соседа слева, правда ли $2 \times 2 = 4$. В каждом следующем раунде каждый человек спрашивает у соседа слева, получил ли он в предыдущем раунде ответ «Да». Известно, что в последнем раунде прозвучал хотя бы один ответ «Нет». Сколько суммарно могло звучать ответов «Нет» в течение всех 100 раундов?

Ответ: 5050.

Решение. Дадим каждому человеку пустую табличку, на которой можно писать «да» и «нет». На каждой табличке укажем, кому она была выдана и будем говорить «табличка человека X », имея ввиду «табличка, выданная перед началом общения человеку X ». Заставим каждого человека вместо того, чтобы говорить «да» или «нет» словами, отдавать соседу имеющуюся табличку с соответствующей надписью (при необходимости говорящий может эту надпись поменять). Заметим, что при таких правилах каждая табличка побывает у каждого человека ровно один раз и в последнем раунде вернётся к своему владельцу, пройдя вокруг всего стола против часовой стрелки. Легко видеть, что рыцарь, получив от соседа слева табличку, в следующем раунде отдаст её соседу справа не поменяв надпись, а лжец надпись поменяет. Таким образом, надпись на каждой табличке к последнему раунду поменяется столько раз, у скольких лжецов эта табличка побывала со второго по последний раунды.

По условию, в последнем раунде хотя бы на одной из табличек оказалась надпись «нет». Если это была табличка лжеца, то в первом раунде на ней было написано «нет», стало быть она изменила свою надпись чётное число раз, то есть побывала со второго по последний раунды у чётного числа лжецов. Тогда всего лжецов нечётно. Если же это была табличка рыцаря, то в первом раунде на ней было написано «да», значит, она изменила надпись нечётное число раз, откуда вновь следует, что число лжецов за столом нечётно. Выходит, всего имеется нечётное число лжецов.

Требуется подсчитать, сколько всего раз на табличках передавалось слово «нет». Разобьём все слова, переданные на табличках на пары: слово, переданное человеку A на табличке человека B и слово, переданное человеку B на табличке человека A . Имеется $100 \cdot 101/2 = 5050$ таких пар, рассмотрим одну из них.

A и B делят круглый стол на две «дуги». Если A и B оба лжецы или оба

рыцари, то число лжецов, сидящих внутри этих дуг, нечётно; не умаляя общности на дуге AB (проходимой против часовой стрелки) сидит нечётное число лжецов, а на дуге BA — чётное. Кроме того, в первом раунде A и B написали на своих табличках одно и то же. Тогда табличка A дойдёт до B через нечётное число лжецов и поменяет свою надпись, а табличка B дойдёт до A через чётное число лжецов и надпись не поменяет.

Если A и B — лжец и рыцарь, то на дугах AB и BA сидит суммарно чётное число лжецов, то есть либо обе таблички, пройдя по этим дугам, поменяют свои надписи, либо обе не поменяют. Однако в этом случае надписи на табличках в первом раунде различались (так как один из A и B рыцарь и написал «да», а второй лжец и написал «нет»).

Значит, в обоих случаях надпись, которую получил A на табличке B и надпись, которую B получил на табличке A , различаются, то есть одна из надписей в каждой паре — «да», а вторая — «нет». Тем самым всего было передано 5050 слов «нет» и 5050 слов «да».

- 5.2.** По кругу сидят 200 человек, каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Они решили провести 200 раундов общения. В первом раунде каждый человек спрашивает у соседа слева, правда ли $2 \times 2 = 4$. В каждом следующем раунде каждый человек спрашивает у соседа слева, получил ли он в предыдущем раунде ответ «Да». Известно, что в последнем раунде прозвучал хотя бы один ответ «Нет». Сколько суммарно могло звучать ответов «Нет» в течение всех 200 раундов?

Ответ: 20100.

- 5.3.** По кругу сидят 300 человек, каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Они решили провести 300 раундов общения. В первом раунде каждый человек спрашивает у соседа слева, правда ли $2 \times 2 = 4$. В каждом следующем раунде каждый человек спрашивает у соседа слева, получил ли он в предыдущем раунде ответ «Да». Известно, что в последнем раунде прозвучал хотя бы один ответ «Нет». Сколько суммарно могло звучать ответов «Нет» в течение всех 300 раундов?

Ответ: 45150.

- 5.4.** По кругу сидят 400 человек, каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Они решили провести 400 раундов общения. В первом раунде каждый человек спрашивает у соседа слева, правда ли $2 \times 2 = 4$. В каждом следующем раунде каждый человек спрашивает у соседа слева, получил ли он в предыдущем раунде ответ «Да». Известно, что в последнем раунде прозвучал хотя бы один ответ «Нет». Сколько суммарно могло звучать ответов «Нет» в течение всех 400 раундов?

Ответ: 80200.

- 6.1.** Целые числа $a \geq b \geq c \geq d$ таковы, что

$$a + b + c + d = 8, \quad ab + cd = 10, \quad ac + bd = 5, \quad ad + bc = 2.$$

Найдите все возможные значения выражения $a^2 + b^2$.

Ответ: 25 или 29.

Решение. Из условия следует, что

$$(a + b)(c + d) = (ac + bd) + (ad + bc) = 7;$$

$$(a + c)(b + d) = (ab + cd) + (ad + bc) = 12;$$

$$(a + d)(b + c) = (ab + cd) + (ac + bd) = 15.$$

Про числа $a+b$ и $c+d$ нам, таким образом, известны их сумма и произведение. Кроме того, из условия известно $a + b \geq c + d$. Тогда эти числа могут быть однозначно найдены равными 7 и 1 соответственно. Аналогично получаем $a + c = 6, b + d = 2$. Поскольку из условия не понятно, какое из чисел $a + d, b + c$ больше, имеется два варианта: $a + d = 3, b + c = 5$ или $a + d = 5, b + c = 3$. Далее, из равенства

$$2a = (a + b) + (a + c) + (a + d) - (a + b + c + d)$$

находим a в первом случае равным 4, а во втором случае равным 5. Теперь мы можем найти остальные числа. В первом случае получаем $(a, b, c, d) = (4, 3, 2, -1)$, а во втором — $(a, b, c, d) = (5, 2, 1, -2)$. Тогда $a^2 + b^2$ может быть равно 25 или 29.

6.2. Целые числа $a \geq b \geq c \geq d$ таковы, что

$$a + b + c + d = 12, \quad ab + cd = 28, \quad ac + bd = 7, \quad ad + bc = 4.$$

Найдите все возможные значения выражения $a^2 + b^2$.

Ответ: 61 или 65.

6.3. Целые числа $a \geq b \geq c \geq d$ таковы, что

$$a + b + c + d = 14, \quad ab + cd = 26, \quad ac + bd = 19, \quad ad + bc = 14.$$

Найдите все возможные значения выражения $a^2 + b^2$.

Ответ: 61 или 73.

6.4. Целые числа $a \geq b \geq c \geq d$ таковы, что

$$a + b + c + d = 14, \quad ab + cd = 28, \quad ac + bd = 17, \quad ad + bc = -4.$$

Найдите все возможные значения выражения $a^2 + b^2$.

Ответ: 89 или 109.

7.1. По кругу записаны n целых чисел, каждые два соседних отличаются на 1. Сумма чисел, которые больше двух своих соседей, равна 100, а сумма чисел, которые меньше двух своих соседей, равна 37. Найдите все возможные значения n .

Ответ: 126.

Решение. Назовём число громким, если оно больше двух своих соседей, и тихим, если оно меньше двух своих соседей. Для каждой пары соседних чисел посчитаем разность между большим и меньшим. Каждая такая разность равна 1 по условию, а значит их сумма равна n . С другой стороны, в эту сумму каждое громкое число входит два раза со знаком «+», каждое тихое входит два раза со знаком «-», а каждое не громкое и не тихое входит два раза с разными знаками. Значит, полученная сумма равна удвоенной разности между суммой громких чисел и суммой тихих чисел, то есть $n = 2 \cdot (100 - 37) = 126$.

- 7.2. По кругу записаны n целых чисел, каждые два соседних отличаются на 1. Сумма чисел, которые больше двух своих соседей, равна 150, а сумма чисел, которые меньше двух своих соседей, равна 93. Найдите все возможные значения n .

Ответ: 114.

- 7.3. По кругу записаны n целых чисел, каждые два соседних отличаются на 1. Сумма чисел, которые больше двух своих соседей, равна 130, а сумма чисел, которые меньше двух своих соседей, равна 59. Найдите все возможные значения n .

Ответ: 142.

- 7.4. По кругу записаны n целых чисел, каждые два соседних отличаются на 1. Сумма чисел, которые больше двух своих соседей, равна 110, а сумма чисел, которые меньше двух своих соседей, равна 31. Найдите все возможные значения n .

Ответ: 158.

- 8.1. Рассмотрим правильный 16-угольник M . Прямоугольник называется *хорошим*, если каждая его сторона лежит на прямой, содержащей сторону или диагональ M . Сколько существует хороших прямоугольников?

Ответ: 4900.

Решение. Для краткости условимся в данном решении слова «отрезок a параллелен отрезку b , либо совпадает с ним» заменять на слова «отрезок a параллелен отрезку b ». Диагонали, соединяющие противоположные вершины M , будем называть «главными».

Любая диагональ M параллельна одной из его сторон или одной из его главных диагоналей. Таким образом, имеется два типа хороших прямоугольников: те, у которых стороны параллельны двум перпендикулярным главным диагоналям M (первый тип), и те, у которых стороны параллельны двум перпендикулярным сторонам M (второй тип).

Посчитаем число прямоугольников первого типа. Имеется 4 способа выбрать пару перпендикулярных главных диагоналей. Каждой главной диагонали параллельно ровно 7 диагоналей M . Стало быть, каждой паре главных диаго-

налей соответствует ровно $C_7^2 \cdot C_7^2 = 441$ способ выбрать четыре прямые, содержащие стороны хорошего прямоугольника. Значит, всего прямоугольников первого типа $4 \cdot 441 = 1764$.

Посчитаем число прямоугольников второго типа. Все стороны и диагонали M разбиваются на 8 классов, в каждом по 8 параллельных отрезков. Имеется 4 способа выбрать из этих классов два, соответствующих перпендикулярным направлениям. Каждому выбору двух перпендикулярных классов соответствует $C_8^2 \cdot C_8^2 = 784$ способа выбрать 4 прямые, содержащие стороны хорошего прямоугольника. Значит, всего прямоугольников второго типа $4 \cdot 784 = 3136$.

Получаем, что всего хороших прямоугольников $1764 + 3136 = 4900$.

- 8.2.** Рассмотрим правильный 20-угольник M . Прямоугольник называется *хорошим*, если каждая его сторона лежит на прямой, содержащей сторону или диагональ M . Сколько существует хороших прямоугольников?

Ответ: 16605.

- 9.1.** На плоскости даны две непересекающиеся равные окружности. Прямая пересекает первую окружность в точках A и B , а вторую — в точках C и D так, что $AB = BC = CD = 14$. Другая прямая пересекает первую окружность в точках P и Q , а вторую — в точках R и S так, что $PQ = QR = RS = 6$. Найдите радиус окружностей.

Ответ: 13.

Решение. Выясним, как вообще могут располагаться такие прямые l , что $XY = YZ = ZT$, где X, Y — точки пересечения l с первой окружностью, а Z и T — точки пересечения l со второй окружностью. Пусть O_1, O_2 — центры соответственно первой и второй окружностей, R — искомый радиус, а d — расстояние между O_1 и O_2 . Заметим сразу, что треугольники XO_1Y и ZO_2T равны по трём сторонам.

Случай 1. Предположим, что O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой l . Тогда отметим по другую сторону от l точку K так, чтобы

$$\triangle XO_1Y = \triangle YKZ = \triangle ZO_2T.$$

Так как все эти треугольники равнобедренные (их боковые стороны равны по R), углы ZYK, O_1YX, YZK, O_2ZT равны, из чего следует, что O_1, Y, K лежат на одной прямой и O_2, Z, K лежат на одной прямой. Но тогда в треугольнике KO_1O_2 YZ — средняя линия, и $XY = YZ = \frac{1}{2}O_1O_2 = \frac{1}{2}d$.

вое больше второго. Значит, в нашей ситуации $14 = \frac{1}{2}d$ и $6 = \sqrt{\frac{1}{3}(d^2 - 4R^2)}$.

Из этих двух соотношений находим $R = 13$.

- 9.2.** На плоскости даны две непересекающиеся равные окружности. Прямая пересекает первую окружность в точках A и B , а вторую — в точках C и D так, что $AB = BC = CD = 19$. Другая прямая пересекает первую окружность в точках P и Q , а вторую — в точках R и S так, что $PQ = QR = RS = 16$. Найдите радиус окружностей.

Ответ: 13.

- 9.3.** На плоскости даны две непересекающиеся равные окружности. Прямая пересекает первую окружность в точках A и B , а вторую — в точках C и D так, что $AB = BC = CD = 26$. Другая прямая пересекает первую окружность в точках P и Q , а вторую — в точках R и S так, что $PQ = QR = RS = 14$. Найдите радиус окружностей.

Ответ: 23.

- 9.4.** На плоскости даны две непересекающиеся равные окружности. Прямая пересекает первую окружность в точках A и B , а вторую — в точках C и D так, что $AB = BC = CD = 13$. Другая прямая пересекает первую окружность в точках P и Q , а вторую — в точках R и S так, что $PQ = QR = RS = 8$. Найдите радиус окружностей.

- 10.1.** Пусть α , β и γ — различные корни многочлена $20x^3 - 22x^2 + 2x + 1$. Известно, что их модули меньше 1. Найдите значение суммы

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^i \beta^j \gamma^k$$

(то есть суммируются числа вида $\alpha^i \beta^j \gamma^k$ для всех троек целых неотрицательных чисел (i, j, k)).

Ответ: 20.

Решение. Воспользуемся тем, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^i \beta^j \gamma^k = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \right).$$

По формуле суммирования бесконечной геометрической прогрессии в правой части получаем

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{1}{1-\gamma} = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}.$$

Найдём знаменатель последней дроби. Поскольку α, β, γ — корни многочлена $20x^3 - 22x^2 + 2x + 1$, имеем

$$20x^3 - 22x^2 + 2x + 1 = 20(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma).$$

Подставляя $x = 1$ в это равенство, получаем $1 = 20(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$, поэтому искомым знаменатель равен $1/20$, а исходная сумма равна 20 .

- 10.2.** Пусть α, β и γ — различные корни многочлена $30x^3 - 27x^2 - 3x + 5$. Известно, что их модули меньше 1 . Найдите значение суммы

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^i \beta^j \gamma^k$$

(то есть суммируются числа вида $\alpha^i \beta^j \gamma^k$ для всех троек целых неотрицательных чисел (i, j, k)).

Ответ: 6.

- 10.3.** Пусть α, β и γ — различные корни многочлена $35x^3 - 39x^2 + 4x + 1$. Известно, что их модули меньше 1 . Найдите значение суммы

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^i \beta^j \gamma^k$$

(то есть суммируются числа вида $\alpha^i \beta^j \gamma^k$ для всех троек целых неотрицательных чисел (i, j, k)).

Ответ: 35.

- 10.4.** Пусть α, β и γ — различные корни многочлена $36x^3 - 38x^2 + 2x + 3$. Известно, что их модули меньше 1 . Найдите значение суммы

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^i \beta^j \gamma^k$$

(то есть суммируются числа вида $\alpha^i \beta^j \gamma^k$ для всех троек целых неотрицательных чисел (i, j, k)).

Ответ: 12.

- 11.1.** В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза BC равна 38 . Внутри треугольника нашлись точки K и L такие, что $AK = AL = BK = CL = KL = 14$. Найдите квадрат площади четырёхугольника $BKLC$.

Ответ: 32448.

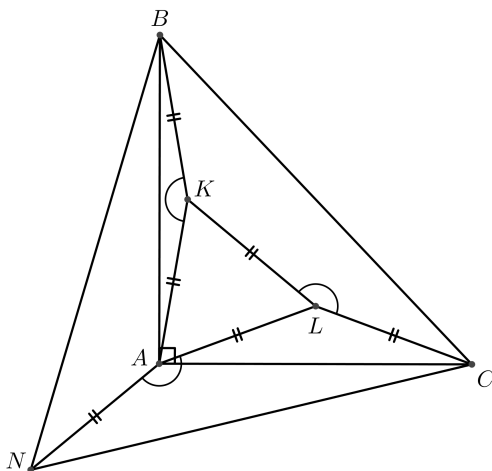
Решение. Пусть $\angle ABK = \varphi$. Тогда из равнобедренности треугольника ABK находим $\angle BKA = 180^\circ - 2\varphi$ и $\angle BAK = \varphi$. Из правильности треугольника ALK имеем $\angle KAL = \angle KLA = 60^\circ$, поэтому $\angle LAC = 90^\circ - 60^\circ - \varphi = 30^\circ - \varphi$. Тогда равнобедренность LAC даёт $\angle ALC = 120^\circ + 2\varphi$, и $\angle KLC = 360^\circ - 60^\circ - 120^\circ - 2\varphi = 180^\circ - 2\varphi$.

Рассмотрим поворот на 120° вокруг центра треугольника AKL , который переводит точку K в точку L . В силу установленного равенства $\angle BKA =$

$\angle KLC$ этот поворот переводит точку B в точку на луче LC . Также, из-за равенства $BK = LC$ заключаем, что B переходит в C . Пусть N — образ точки C при этом повороте. Тогда треугольник BCN правильный, поскольку переходит в себя при повороте на 120° . Четырёхугольники $BKLC$, $CLAN$, $NAKB$ при этом повороте переходят соответственно в $CLAN$, $NAKB$, $BKLC$, из чего мы заключаем, что их площади равны. Но тогда они равны

$$\frac{S_{BNC} - S_{AKL}}{3} = \frac{(38^2 - 14^2)\sqrt{3}}{12} = 104\sqrt{3}.$$

Остаётся лишь возвести полученное число в квадрат.



- 11.2.** В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза BC равна 35. Внутри треугольника нашлись точки K и L такие, что $AK = AL = BK = CL = KL = 13$. Найдите квадрат площади четырёхугольника $BKLC$.

Ответ: 23232.

- 11.3.** В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза BC равна 19. Внутри треугольника нашлись точки K и L такие, что $AK = AL = BK = CL = KL = 7$. Найдите квадрат площади четырёхугольника $BKLC$.

Ответ: 2028.

- 11.4.** В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза BC равна 48. Внутри треугольника нашлись точки K и L такие, что $AK = AL = BK = CL = KL = 18$. Найдите квадрат площади четырёхугольника $BKLC$.

Ответ: 81675.

- 12.1.** Пусть $\sigma(n)$ — сумма всех делителей натурального числа n (включая 1 и n).

Найдите количество натуральных n , не превосходящих 2025, для которых

$$\sigma(3n) \geq \sigma(n) + \sigma(2n).$$

Ответ: 1483.

Решение. Пусть числа l и m взаимно просты. Тогда любой делитель lm имеет вид $d_1 \cdot d_2$, где d_1 — делитель l , а d_2 — делитель m . Но тогда, если $a_1, \dots, a_s$ — все делители l , а $b_1, \dots, b_t$ — все делители m , то

$$\sigma(lm) = \sum_{i,j} a_i b_j = \left(\sum_i a_i \right) \cdot \left(\sum_j b_j \right) = \sigma(l) \cdot \sigma(m).$$

Тем самым мы доказали, что $\sigma(lm) = \sigma(l)\sigma(m)$ для любых взаимно простых l, m . Также ясно, что для простых p

$$\sigma(p^k) = p^k + p^{k-1} + \dots + 1 = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

Пусть теперь $n = 2^a \cdot 3^b \cdot d$, где d не делится на 2 и 3. Тогда с учётом доказанного

$$\begin{aligned}\sigma(3n) &= \frac{1}{2} \sigma(d) \cdot (2^{a+1} - 1) \cdot (3^{b+2} - 1); \\ \sigma(2n) &= \frac{1}{2} \sigma(d) \cdot (2^{a+2} - 1) \cdot (3^{b+1} - 1); \\ \sigma(n) &= \frac{1}{2} \sigma(d) \cdot (2^{a+1} - 1) \cdot (3^{b+1} - 1).\end{aligned}$$

Заметим, что эти формулы верны и в случаях, когда среди чисел a и b есть нули.

Подставим полученные соотношения в исходное неравенство. После преобразований получаем равносильное неравенство

$$2^{a+2} \geq 3^{b+1} + 1.$$

Нас интересуют его целые решения, при чем такие, что $2^a \cdot 3^b \leq 2025$. Таковыми являются

$$\begin{aligned}(a, b) &= (0, 0); (1, 0); (2, 0); \dots; (10, 0); \\ &(2, 1); (3, 1); \dots; (9, 1); \\ &(3, 2); (4, 2); (5, 2); (6, 2); (7, 2); \\ &(5, 3); (6, 3).\end{aligned}$$

Для каждых конкретных (a, b) в качестве d подходят все числа, не кратные 2 и 3 и не превосходящие

$$\left\lfloor \frac{2025}{2^a \cdot 3^b} \right\rfloor.$$

Количество чисел, не превосходящих N и не кратных 2 и 3, может быть вычислено по формуле

$$f(N) = N - \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{6} \right\rfloor.$$

Таким образом, ответом на задачу является сумма

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} f\left(\left\lfloor \frac{2025}{2^a \cdot 3^b} \right\rfloor\right) &= \\ &= f(2025) + f(1012) + f(506) + f(253) + f(126) + f(63) + \\ &\quad + f(31) + f(15) + f(7) + f(3) + f(1) + \\ &\quad + f(168) + f(84) + f(42) + f(21) + f(10) + f(5) + f(2) + f(1) + \\ &\quad + f(28) + f(14) + f(7) + f(3) + f(1) + \\ &\quad + f(2) + f(1) = \\ &= 675 + 337 + 169 + 85 + 42 + 21 + 11 + 5 + 3 + 1 + 1 + \\ &\quad + 56 + 28 + 14 + 7 + 3 + 2 + 1 + 1 + \\ &\quad + 9 + 5 + 3 + 1 + 1 + \\ &\quad + 1 + 1 = 1483. \end{aligned}$$

- 12.2.** Пусть $\sigma(n)$ — сумма всех делителей натурального числа n (включая 1 и n).
Найдите количество натуральных n , не превосходящих 2050, для которых

$$\sigma(3n) \geq \sigma(n) + \sigma(2n).$$

Ответ: 1502.

- 12.3.** Пусть $\sigma(n)$ — сумма всех делителей натурального числа n (включая 1 и n).
Найдите количество натуральных n , не превосходящих 2000, для которых

$$\sigma(3n) \geq \sigma(n) + \sigma(2n).$$

Ответ: 1465.

- 12.4.** Пусть $\sigma(n)$ — сумма всех делителей натурального числа n (включая 1 и n).
Найдите количество натуральных n , не превосходящих 2075, для которых

$$\sigma(3n) \geq \sigma(n) + \sigma(2n).$$

Ответ: 1520.