Диагностическая работа. Дистанционный этап.

Задача 1.1. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно покрыть прямоугольник $100 \times \sqrt{3}$?

Ответ: 100

Решение. Заметим, что такой прямоугольник несложно покрыть 100 кругами.

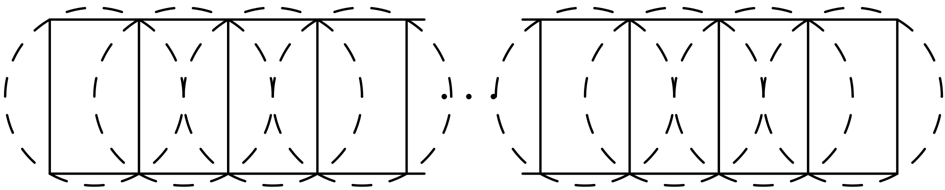


Рис. 1: К задаче 1

Теперь рассмотрим 100 отмеченных точек, которые расположены достаточно близко к границе прямоугольника. Можем подобрать эти точки так, чтобы никакой круг радиуса 1 не содержал двух точек одновременно, что будет означать, что нам понадобится хотя бы 100 кругов.

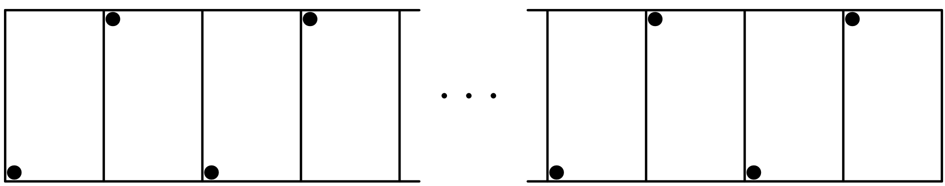


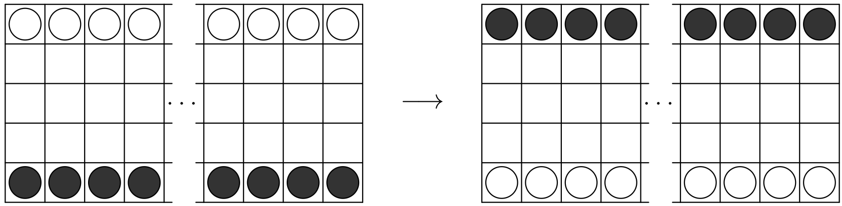
Рис. 2: К задаче 1

□

Задача 1.2. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно покрыть прямоугольник $95 \times \sqrt{3}$?

Ответ: 95

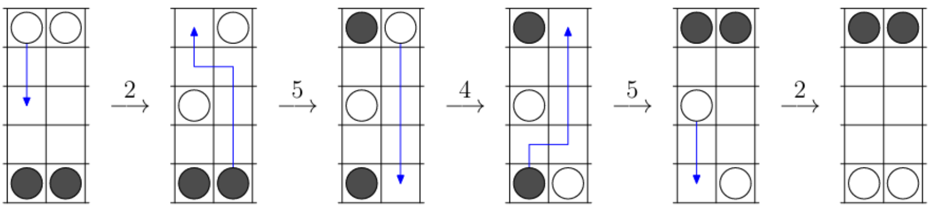
Задача 2.1. На доске 1000×5 расположены 1000 белых и 1000 чёрных фишек, как показано на рисунке (в каждом столбце в верхней клетке — белая, а в нижней — чёрная). За один ход можно передвинуть фишку на пустую, соседнюю по стороне клетку. Найдите наименьшее число ходов которое понадобится, чтобы перейти из начальной позиции в конечную (в каждом столбце в верхней клетке — чёрная, а в нижней — белая).



Ответ: 9000

Решение. *Оценка.* Заметим, что каждая фишка должна сделать как минимум 4 вертикальных хода, чтобы достичь противоположного края доски. Также для каждой пары фишек, которые изначально стоят в одном столбце необходим как минимум один горизонтальный ход, поскольку в противном случае их порядок в столбце не сможет измениться. Таким образом, понадобится не меньше $4 \cdot 2000 + 1000 = 9000$ ходов.

Пример. Разобьём доску на прямоугольники 5×2 и в каждом сделаем следующую последовательность ходов.

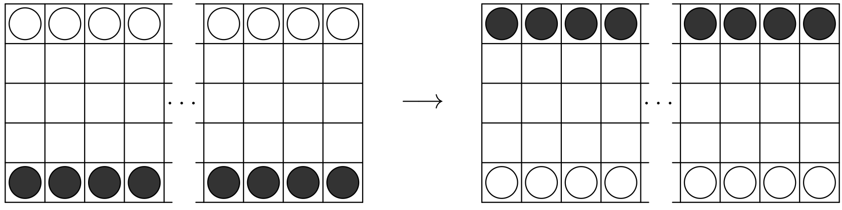


К задаче 2.1

$\square$

Задача 2.2. На доске 2000×5 расположены 2000 белых и 2000 чёрных фишек, как показано на рисунке (в каждом столбце в верхней клетке — белая, а в нижней — чёрная). За один ход можно передвинуть фишку на пустую, соседнюю по стороне клетку. Найдите наименьшее число ходов которое понадобится, чтобы перейти из начальной позиции в конечную (в каждом столбце в верхней клетке — чёрная, а в нижней — белая).

Ответ: 18000



Задача 3.1. Точка P лежит внутри треугольника ABC, причём $BP = PC$ и $\angle APC - \angle APB = 60^\circ$. Найдите длину отрезка BC, если $AP = 12$, $AB = 20$ и $AC = 25$.

Ответ: $18,75$

Решение. Пусть точка A' симметрична A относительно серединного перпендикуляра к BC. Заметим, что

$$\angle APA' = \angle APC - \angle A'PC = \angle APC - \angle APB = 60^\circ.$$

Значит, точка P лежит на серединном перпендикуляре к BC, а точки A и A' симметричны относительно него, получаем, что треугольник APA' — равнобедренный с углом $\angle APA' = 60^\circ$, то есть равносторонний. Из симметрии относительно серединного перпендикуляра к BC также следует, что $A'C = AB$, а $AA' \parallel BC$. Тогда четырёхугольник $BAA'C$ — равнобедренная трапеция (или прямоугольник), то есть $BAA'C$ можно вписать в окружность. По теореме Птолемея получаем, что

$$AB \cdot A'C + AA' \cdot BC = AC \cdot A'B \Longleftrightarrow AB^2 + AP \cdot BC = AC^2.$$

Таким образом

$$BC = \frac{AC^2 - AB^2}{AP} = \frac{25^2 - 20^2}{12} = 18,75.$$

□

Задача 3.2. Точка P лежит внутри треугольника ABC, причём $BP = PC$ и $\angle APC - \angle APB = 60^\circ$. Найдите длину отрезка BC, если $AP = 16$, $AB = 25$ и $AC = 35$.

Ответ: $37,5$

Задача 4.1. Петя вписывает в каждую клетку квадратной таблицы 1001×1001 по одному крестику или нолику, чередуя их, начиная с крестика (то есть первым ходом Петя вписывает в какую-то клетку крестик, на втором — в какую-то свободную клетку нолик и т.д.). После этого он вычисляет величину $O - X$, где O — число строк и столбцов таблицы, в которых ноликов строго больше чем крестиков, а X — число строк и столбцов таблицы, в которых крестиков строго больше чем ноликов. Какое наибольшее число может получиться у Пети?

Ответ: 1998

Решение. Рассмотрим таблицу размером $(2n+1)\times(2n+1)$, заполненную $\frac{1}{2}((2n+1)^2 - 1) = 2n(n+1)$ кругами и $2n(n+1)+1$ крестиками. Поскольку $2n+1$ — нечётное число, каждая строка и каждый столбец доминируются одним из двух символов. Круги могут доминировать не более чем в $2n(n+1)/(n+1) = 2n$ строках, и, следовательно, по крайней мере одна строка доминируется крестиками. Аналогично и для столбцов, следовательно, $O \leqslant 2n+2n = 4n$, $X \geqslant 1+1 = 2$ и, следовательно, $O - X \leqslant 4n-2$. Наконец, докажем, что оценка $4n-2$ может быть достигнута для любого n. Достаточно задать множество S из $2n(n+1)$ ячеек, которые должны быть заполнены кругами. Примером является множество S, состоящее из $n+1$ «параллельных диагоналей» в верхнем левом подквадрате $2n \times 2n$ таблицы и не содержащее других ячеек в нижней строке или правом столбце. □

Задача 4.2. Петя вписывает в каждую клетку квадратной таблицы 997×997 по одному крестику или нолику, чередуя их, начиная с крестика (то есть первым ходом Петя вписывает в какую-то клетку крестик, на втором — в какую-то свободную клетку нолик и т.д.). После этого он вычисляет величину $O - X$, где O — число строк и столбцов таблицы, в которых ноликов строго больше чем крестиков, а X — число строк и столбцов таблицы, в которых крестиков строго больше чем ноликов. Какое наибольшее число может получиться у Пети?

Ответ: 1990

Задача 5.1. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют соотношению

$$\left(\frac{abc}{2}\right)^2 = \frac{32}{abd^2 + a^2}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$ab + bc + cd + da + \frac{ac}{bd}.$$

Ответ: 10

Решение. По неравенству о средних

$$\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + bc + da + \left(cd + \frac{ac}{bd}\right) \geqslant 5\sqrt[5]{\frac{a^3b^2c^2(bd^2 + a)}{4}} = 10.$$

Равенство достигается при $a = b = 2$, $c = d = 1$. □

Задача 5.2. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют соотношению

$$\left(\frac{abc}{2}\right)^2 = \frac{2^{15}}{abd^2 + 4a^2}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$ab + bc + cd + da + \frac{4ac}{bd}.$$

Ответ: 40

Задача 6.1. Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 10 так, чтобы выполнялось следующее условие: если число k выбрано, то хотя бы одно из чисел $k - 1$ и $k + 1$ также выбрано?

Ответ: 45

Решение. Упорядочим выбранные числа: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Так как числа $a_1 - 1$ и $a_6 + 1$ точно не выбраны, из условия получаем $a_2 = a_1 + 1$ и $a_5 = a_6 - 1$. Далее рассмотрим 2 варианта:

$a_4 = a_3 + 1$. В этом случае все условия выполняются. Тогда числа a_1, $a_3 - 1$ и $a_5 - 2$ — это 3 различных числа от 1 до $n-3$, и есть C_{n-3}^3 способа их выбрать. Нетрудно видеть, что каждому способу соответствует ровно одна подходящая шестёрка.

$a_4 \neq a_3 + 1$. Тогда из условия имеем $a_2 = a_3 - 1$ и $a_5 = a_4 + 1$. Тогда a_1 и $a_4 - 3$ — два различных числа от 1 до $n-5$, и есть C_{n-5}^2 способа их выбрать. Нетрудно видеть, что каждому способу соответствует ровно одна подходящая шестёрка.

Итого имеем $C_{n-3}^3 + C_{n-5}^2$ подходящих наборов. □

Задача 6.2. Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 12 так, чтобы выполнялось следующее условие: если число k выбрано, то хотя бы одно из чисел $k-1$ и $k+1$ также выбрано?

Ответ: 105

Задача 7.1. Треугольник ABC с углом $\angle BAC > 90°$. Точки D и E лежат на отрезке BC так, что $BD = DE = EC$. Оказалось, что $\angle BAC + \angle DAE = 180°$. Найдите BC^2, если $AB = 5$ и $AC = 7$.

Ответ: 111

Решение. Пусть M — середина отрезка BC, и рассмотрим гомотетию с центром M и отношением $-\frac{1}{3}$. Она переводит B в E, C в D и A в некоторую точку A' на прямой AM, где $AM = 3A'M$. Тогда из условия на углы следует, что $\angle DAE + \angle EA'D = 180°$, поэтому $ADA'E$ является вписанным четырехугольником. Затем по степени точки получаем: $\frac{AM^2}{3} = AM \cdot A'M = DM \cdot EM = \frac{BC^2}{36}$ Но мы также знаем, что $AM^2 = \frac{2AB^2+2AC^2-BC^2}{4}$, поэтому имеем $\frac{2AB^2+2AC^2-BC^2}{12} = \frac{BC^2}{36}$. Тогда $BC^2 = \frac{3}{2}(AB^2 + AC^2)$. Подставляя значения AB и AC, получаем $BC^2 = 111$. □

Задача 7.2. Треугольник ABC с углом $\angle BAC > 90°$. Точки D и E лежат на отрезке BC так, что $BD = DE = EC$. Оказалось, что $\angle BAC + \angle DAE = 180°$. Найдите BC^2, если $AB = 6$ и $AC = 8$.

Ответ: 150

Задача 8.1. Обозначим через T_n количество различных треугольников периметра n, все длины сторон которых — целые числа. Найдите $T_{2025} - T_{2024}$.

Ответ: 338

Решение. Пусть $a < b < c$ — стороны некоторого треугольника с периметром 2024. Тогда из неравенства треугольника $a + b > c$, откуда $a + b \geqslant 1013$, $c \leqslant 1011$. Тогда существует треугольник со сторонами $a, b, c+1$, и он будет периметра 2025. Таким образом будут получены все треугольники со сторонами x, y, z, для которых $x \leq y < z$. Таким образом, $T_{2025} - T_{2024}$ равняется количеству треугольников периметра n со сторонами x, y, y, где $x \leqslant y$.

Неравенство треугольника для них выполнено автоматически. Переменная y может принимать любое значение от 675 до 1012, и поэтому таких треугольников есть ровно 1012-675+1=338. $\square$

Задача 8.2. Обозначим через T_n количество различных треугольников периметра n, все длины сторон которых — целые числа. Найдите $T_{2031} - T_{2030}$.

Ответ: 340

Задача 9.1. Про вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_5$ известно, что

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_5 &= 1, \\ (x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_5+1) &= 2, \\ &\ldots \\ (x_1+4)\cdot(x_2+4)\cdot\ldots\cdot(x_5+4) &= 2^4. \end{aligned}$$

Найдите значение выражения

$$(x_1+5)\cdot(x_2+5)\cdot\ldots\cdot(x_5+5).$$

Ответ: $5! + 2^5 - 1 = 151$

Решение. Рассмотрим многочлен пятой степени $P(t) = (x_1+t)\cdot(x_2+t)\cdot\ldots\cdot(x_5+t)$. Поскольку в условии задачи заданы значения $P(0), P(1), \ldots, P(4)$ многочлена $P(t)$ в пяти различных точках, а его старший коэффициент равен единице, $P(t)$ определяется этими условиями однозначно. Действительно, по теореме об интерполяционном многочлене Лагранжа значения из условия однозначно задают многочлен $Q(t)$ степени не выше 4 со значениями 2^k при $t = k$, где $k = 0, 1, \ldots, 4$. Тем же условиям удовлетворяет многочлен $Q'(t) = C_t^0 + C_t^1 + \ldots + C_t^4$, поэтому $Q'(t) = Q(t)$. Тогда заметим, что числа $0, 1, \ldots, 4$ являются корнями многочлена $P(t) - Q(t)$. Это означает, что $P(t) - Q(t) = C\cdot t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-4)$ для некоторой константы C. Так как старший коэффициент многочлена $P(t) - Q(t)$ равен 1, получаем, что $P(t) = Q(t) + t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-4)$. Подставляя $t = 5$, находим

$$(x_1+5)\cdot(x_2+5)\cdot\ldots\cdot(x_5+5) = 5! + 2^5 - 1 = 151.$$

$\square$

Задача 9.2. Про вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_6$ известно, что

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_6 &= 1, \\ (x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot\ldots\cdot(x_6+1) &= 2, \\ &\ldots \\ (x_1+5)\cdot(x_2+5)\cdot\ldots\cdot(x_6+5) &= 2^5. \end{aligned}$$

Найдите значение выражения

$$(x_1+6)\cdot(x_2+6)\cdot\ldots\cdot(x_6+6).$$

Ответ: $6! + 2^6 - 1 = 783$