1.1. Пусть $A = \frac{201}{2^{201}}$. Определите двузначное число, образованное четвертой и третьей цифрами с конца десятичной записи числа A.
Ответ: 81.
Решение. Заметим, что $\frac{201}{2^{201}} = \frac{201 \cdot 5^{201}}{10^{201}}$, поэтому нам достаточно найти четвертую и третью цифры с конца числа $201 \cdot 5^{201}$. Выявим закономерность: $201 \cdot 5 = 1005$, $201 \cdot 5^2 = 5025$, $201 \cdot 5^3 = ...5125$, $201 \cdot 5^4 = ...5625$, $201 \cdot 5^5 = ...8125$, $201 \cdot 5^6 = ...0625$, $201 \cdot 5^7 = ...3125$, $201 \cdot 5^8 = ...5625$, и с того момента комбинация 5625-8125-0625-3125 зацикливается. Тогда умножение на 201-ю степень попадает на 8125 и ответ — число 81.

1.2. Пусть $A = \frac{203}{2^{203}}$. Определите двузначное число, образованное четвертой и третьей цифрами с конца десятичной записи числа A.
Ответ: 93.

1.3. Пусть $A = \frac{207}{2^{207}}$. Определите двузначное число, образованное четвертой и третьей цифрами с конца десятичной записи числа A.
Ответ: 18.

1.4. Пусть $A = \frac{209}{2^{209}}$. Определите двузначное число, образованное четвертой и третьей цифрами с конца десятичной записи числа A.
Ответ: 31.

2.1. Два ученика составляют некоторую долю класса. Если округлить эту долю до ближайшего целого числа процентов, то получится 5%. Сколько значений может принимать количество учеников в этом классе?
Ответ: 8.
Решение. Пусть всего учеников N. Тогда два ученика составят $\frac{200}{N}$ процентов. Из условия мы понимаем, что $4,5 \leqslant \frac{200}{N} \leqslant 5,5$. Тогда $N < 44\frac{4}{9}$ и $N > 36\frac{4}{11}$. Целые значения, которые может принимать N — числа от 37 до 44. Их восемь.

2.2. Два ученика составляют некоторую долю класса. Если округлить эту долю до ближайшего целого числа процентов, то получится 6%. Сколько значений может принимать количество учеников в этом классе?
Ответ: 6.

2.3. Три ученика составляют некоторую долю класса. Если округлить эту долю до ближайшего целого числа процентов, то получится 5%. Сколько значений может принимать количество учеников в этом классе?
Ответ: 12.

2.4. Три ученика составляют некоторую долю класса. Если округлить эту долю до ближайшего целого числа процентов, то получится 4%. Сколько значений может принимать количество учеников в этом классе?

Ответ: 19.

3.1. Натуральные числа a, b таковы, что для любого натурального k числа $ka+3$ и $kb+2$ не взаимопросты. Чему может быть равно отношение $\frac{a}{b}$? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 3/2.
Решение. Пусть $|2a-3b| = n \neq 0$. Тогда для $k = n$: числа $na+3$ и $nb+2$ имеют общий простой делитель $d > 1$. Тогда и числа $|3(nb+2)-2(na+3)| = n^2$ и $(nb+2)-(na+3) = n(b-a)-1$ делятся на d. Но тода d — делитель единицы, что невозможно. Значит, $2a-3b = 0$. В этом случае $a = 3t, b = 2t$ для какого-то натурального t. Тогда для любого k числа $na+3 = 3(nt+1)$ и $nb+2 = 2(nt+1)$ имеют общий делитель $nt+1 > 1$, как и требовалось. Итак, $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$.

3.2. Натуральные числа a, b таковы, что для любого натурального k числа $ka+5$ и $kb+4$ не взаимопросты. Чему может быть равно отношение $\frac{a}{b}$? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 5/4.

3.3. Натуральные числа a, b таковы, что для любого натурального k числа $ka+11$ и $kb+10$ не взаимопросты. Чему может быть равно отношение $\frac{a}{b}$? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 11/10.

3.4. Натуральные числа a, b таковы, что для любого натурального k числа $ka+6$ и $kb+5$ не взаимопросты. Чему может быть равно отношение $\frac{a}{b}$? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 6/5.

4.1. В треугольнике ABC $AB = 2BC$. Пусть M - середина AB и $\angle MCA = 60°$, а $AC = 30$. Найдите CM.
Ответ: 10.
Решение. Опустим перпендикуляры AK и BH из точек A и B на прямую CM. Треугольник MBC равнобедренный с основанием MC, поэтому $\angle BMC$ — острый, а значит перпендикуляр AK попадает на продложение отрезка CM за точку M, и перпендикуляр BH попадает на отрезок CM. Далее, треугольник AKC прямоугольный с углом $\angle CAK = 30°$, поэтому $CK = \frac{1}{2}AC = 15$. Треугольники AKM и BMH равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $KM = MH$. $MH = HC$ из равнобедренного треугольника MBC. Тогда $CM = \frac{2}{3}KC = 10$.

4.2. В треугольнике ABC $AB = 2BC$. Пусть M - середина AB и $\angle MCA = 60°$, а $AC = 36$. Найдите CM.
Ответ: 12.

4.3. В треугольнике ABC $AB = 2BC$. Пусть M - середина AB и $\angle MCA = 60°$, а $AC = 42$. Найдите CM.
Ответ: 14.

4.4. В треугольнике ABC $AB = 2BC$. Пусть M - середина AB и $\angle MCA = 60^\circ$, а $AC = 51$. Найдите CM.
Ответ: 17.

5.1. Точки P, Q, R, S - середины соответственно сторон $AB = 11, BC = 12, CD = 14, DA = 9$ выпуклого четырехугольника $ABCD$. M - точка внутри этого четырехугольника, такая, что $APMS$ - параллелограмм. Найдите периметр четырехугольника $CRMQ$.
Ответ: 26.
Решение. Пусть M' — середина BD. Тогда PM' и SM'— средние линии треугольника ABD и $APM'S$ — параллелограмм. Но три точки достраиваются до параллелограмма с вершинами в заданном порядке единственным образом, поэтому точки M и M' совпадают. Итак, M — середина BD. Тогда QM, MR — средние линии треугольника BCD и $CRMQ$ — тоже параллелограмм. $P_{CRMQ} = 2CQ + 2CR = BC + CD = 26$.

5.2. Точки P, Q, R, S - середины соответственно сторон $AB = 10, BC = 13, CD = 15, DA = 11$ выпуклого четырехугольника $ABCD$. M - точка внутри этого четырехугольника, такая, что $APMS$ - параллелограмм. Найдите периметр четырехугольника $CRMQ$.
Ответ: 28.

5.3. Точки P, Q, R, S - середины соответственно сторон $AB = 12, BC = 15, CD = 16, DA = 11$ выпуклого четырехугольника $ABCD$. M - точка внутри этого четырехугольника, такая, что $APMS$ - параллелограмм. Найдите периметр четырехугольника $CRMQ$.
Ответ: 31.

5.4. Точки P, Q, R, S - середины соответственно сторон $AB = 14, BC = 15, CD = 18, DA = 12$ выпуклого четырехугольника $ABCD$. M - точка внутри этого четырехугольника, такая, что $APMS$ - параллелограмм. Найдите периметр четырехугольника $CRMQ$.
Ответ: 33.

6. На планете в далекой-далекой галактике в месяце может быть 35, 36 или 42 дня, причем есть месяц, в котором 35 дней, есть месяц, в котором 36 дней, и есть месяц, в котором 42 дня. Космический путешественник знает, что год на этой планете состоит из N дней, но не может определить, сколько в году месяцев. При каком наименьшем N это возможно? Ответ: 323.
Решение. Из условия задачи следует, что выполняется равенство $N = 35x + 36y + 42z = 35a + 36b + 42c$ для двух различных наборов $(x; y; z)$ и $(a; b; c)$, где все переменные — натуральные числа. Перепишем условие: $35(x - a) = 36(b - y) + 42(c - z)$. Правая часть делится на 6, значит и $x - a$ делится на 6. Если $x = a$, то $6(y - b) = 7(c - z)$. Если и здесь $y = b$, то и $z = c$ и наборы совпадают, что нам не подходит. Значит $y \neq b$. Для определенности, пусть $y > b$. $y - b$ делится на 7, поэтому $y - b \geq 7$ и $y \geq 8$. Тогда

$N \geq 35 + 36 \cdot 8 + 42 = 365$. Если же $x \neq a$, и, для определенности, $x > a$, то $x - a$ делится на 6 и $x - a \geq 6$, $x \geq 7$. Тогда $N \geq 35 \cdot 7 + 36 + 42 = 323$. Для $N = 323$ можем написать $323 = 35 \cdot 7 + 36 \cdot 1 + 42 \cdot 1 = 35 \cdot 1 + 36 \cdot 1 + 42 \cdot 6$ и месяцев может быть либо 9, либо 8, т.е. условие выполнено.

7.1. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $AD = BC, \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ACB = 42^\circ$. Найдите угол ABC.
Ответ: 54°.
Решение. Докажем, что $AD = BD = BC$. Пусть это не так, и, например, $BD > BC = AD$. Тогда из соотношения сторон в треугольнике BDC следует, что $\angle BDC < 84^\circ$, а из соотношения сторон в треугольнике ADB следует, что $\angle BAD > 42^\circ$. Но тогда $42^\circ + 42^\circ < 42^\circ + \angle BAD = \angle BDC < 84^\circ$, что, очевидно, невозможно. Аналогично, невозможно ситуация $BD < BC = AD$. Значит, $AD = BD = BC$. Тогда несложный подсчет углов дает, что $ABC = 54^\circ$.

7.2. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $AD = BC, \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ACB = 44^\circ$. Найдите угол ABC.
Ответ: 48°.

7.3. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $AD = BC, \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ACB = 46^\circ$. Найдите угол ABC.
Ответ: 42°.

7.4. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $AD = BC, \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ACB = 48^\circ$. Найдите угол ABC.
Ответ: 36°.

8.1. Сколькими способами можно покрасить квадрат 10×10 в черный и белый цвета так, чтобы в каждом столбце и каждой строке было ровно 2 черных клетки, между которыми находится ровно 4 белых клетки?
Ответ: 120.
Решение. Разделим квадрат 10×10 на 4 квадрата 5×5. Назовем левый верхний из этих квадратов первым, правый верхний — вторым, правый нижний — третьим, левый нижний — четвертым. Посмотрим на первую сверху строку. Т.к. между черными клетками в этой строке лежит ровно пять белых, то одна из них лежит в первом квадрате, а другая — во втором. Аналогично для всех пяти первых строк. Для всех пяти левых столбцов одна из черных клеток столбца лежит в первом квадрате, а другая — в четвертом. Таким образом, в первом квадрате лежит ровно пять черных клеток, причем в каждом столбце и каждой строчке этого квадрата лежит ровно одна черная. Выбрать эти клетки можно $5! = 120$ способами. Несложно заметить, что выбранные клетки однозначно задают расположение всех остальных черных клеток.

8.2. Сколькими способами можно покрасить квадрат 12×12 в черный и белый цвета так, чтобы в каждом столбце и каждой строке было ровно 2 черных клетки, между которыми находится ровно 5 белых клетки?

Ответ: 720.

9.1. Есть пустая таблица с шестью строками и n столбцами. Сначала в каждой клетке доски записали числа от 1 до $6n$, в верхней строчке — слева направо подряд от 1 до n, во второй сверху - от $n+1$ до $2n$ и т.д. Затем те же числа от 1 до $6n$ записали другим образом — сначала заполнили первый столбец сверху вниз числами от 1 до 6, потом второй столбец числами от 7 до 12, и т.д. Потом сложили два числа в каждой клетке. Оказалось, что какие-то два из полученных чисел совпали. Для скольких $n \leqslant 200$ это возможно?
Ответ: 28.
Решение. Пронумеруем строки сверху вниз числами от 1 до 6 и стобцы слева направо числами от 1 до n. При первой расстановке в клетке на пересечении $i-$ой строки и $j-$ого столбца стоит число $n(i-1)+j$, а при второй расстановке в этой же клетке стоит число $6(j-1)+i$. Сумма чисел в этой клетке равна $n(i-1)+j+6(j-1)+i=(n+1)i+7j-n-6$. Пусть для двух клеток (i,j) и (k,l) итоговые числа совпали. Тогда $(n+1)i+7j-n-6=(n+1)k+7l-n-6$, т.е. $(n+1)(i-k)=7(l-j)$. Числа i,k принимают только значения $1,2,3,4,5,6$. Если $i=k$, то $l=j$ и клетки совпадают, что нам не подходит. Если $i \neq k$, то, $i-k$ не может делиться на 7, а значит $n+1$ делится на 7. Тогда n — число вида $7x-1, x \in \mathbf{N}$. Таких чисел до 200 ровно 28. Несложно увидеть, что для каждого числа такого вида найдутся две клетки с одинаковой суммой написанных чисел.

9.2. Есть пустая таблица с шестью строками и n столбцами. Сначала в каждой клетке доски записали числа от 1 до $6n$, в верхней строчке — слева направо подряд от 1 до n, во второй сверху - от $n+1$ до $2n$ и т.д. Затем те же числа от 1 до $6n$ записали другим образом — сначала заполнили первый столбец сверху вниз числами от 1 до 6, потом второй столбец числами от 7 до 12, и т.д. Потом сложили два числа в каждой клетке. Оказалось, что какие-то два из полученных чисел совпали. Для скольких $n \leqslant 250$ это возможно?
Ответ: 35.

9.3. Есть пустая таблица с шестью строками и n столбцами. Сначала в каждой клетке доски записали числа от 1 до $6n$, в верхней строчке — слева направо подряд от 1 до n, во второй сверху - от $n+1$ до $2n$ и т.д. Затем те же числа от 1 до $6n$ записали другим образом — сначала заполнили первый столбец сверху вниз числами от 1 до 6, потом второй столбец числами от 7 до 12, и т.д. Потом сложили два числа в каждой клетке. Оказалось, что какие-то два из полученных чисел совпали. Для скольких $n \leqslant 280$ это возможно?
Ответ: 40.

9.4. Есть пустая таблица с шестью строками и n столбцами. Сначала в каждой клетке доски записали числа от 1 до $6n$, в верхней строчке — слева направо подряд от 1 до n, во второй сверху - от $n+1$ до $2n$ и т.д. Затем те же числа от 1 до $6n$ записали другим образом — сначала заполнили первый столбец сверху вниз числами от 1 до 6, потом второй столбец числами от 7 до 12, и т.д. Потом сложили два числа в каждой клетке. Оказалось, что какие-то

два из полученных чисел совпали. Для скольких $n \leqslant 310$ это возможно?
Ответ: 44.

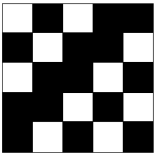
10.1. Сначала на столе лежит 14 красных, 15 зеленых и 16 синих карт. За ход можно забрать со стола карту и получить столько очков, сколько карт других цветов осталось на столе после этого хода. Какое количество очков можно получить? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 674.
Решение. Заметим, что конкретная пара разноцветных карточек будет посчитана ровно один раз — в тот момент, когда одна из карт пары покидает стол, а другая еще остается на столе. Значит, каждая пара разноцветных карт приносит ровно одно очко. Таких пар $14 \cdot 15 + 15 \cdot 16 + 16 \cdot 14 = 674$.

10.2. Сначала на столе лежит 13 красных, 15 зеленых и 17 синих карт. За ход можно забрать со стола карту и получить столько очков, сколько карт других цветов осталось на столе после этого хода. Какое количество очков можно получить? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 671.

10.3. Сначала на столе лежит 13 красных, 14 зеленых и 18 синих карт. За ход можно забрать со стола карту и получить столько очков, сколько карт других цветов осталось на столе после этого хода. Какое количество очков можно получить? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 668.

10.4. Сначала на столе лежит 14 красных, 16 зеленых и 17 синих карт. За ход можно забрать со стола карту и получить столько очков, сколько карт других цветов осталось на столе после этого хода. Какое количество очков можно получить? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 734.

11.1. Клетки квадрата 100×100 покрашены в чёрный и белый цвет так, что в любом прямоугольнике 1×2 есть хотя бы одна чёрная клетка, и в любом прямоугольнике 1×6 найдутся две чёрные клетки, стоящие рядом. Какое наименьшее количество чёрных клеток может быть в этом квадрате?
Ответ: 6000.
Решение. Рассмотрим полоску 1×5. Чтобы в каждой доминошке внутри этой полоски была черная клетка, их должно быть хотя бы две. Но если их ровно две, то они стоят во второй и четвертой клетках полоски, а значит — с краю черной клетки нет. Но тогда, если мы удлиним полоску на одну клетку до 1×6, то в такой полоске уже точно не будет двух черных подряд. Противоречие. Значит, в любой полоске 1×5 хотя бы 3 черных клетки. Квадрат 100×100 разбивается на 2000 полосок 1×5, а значит в нем хотя бы 6000 черных клеток. Для примера нужно замостить весь квадрат шаблоном на рисунке.

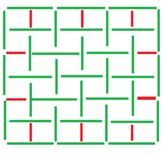


11.2. Клетки квадрата 120×120 покрашены в чёрный и белый цвет так, что в любом прямоугольнике 1×2 есть хотя бы одна чёрная клетка, и в любом прямоугольнике 1×6 найдутся две чёрные клетки, стоящие рядом. Какое наименьшее количество чёрных клеток может быть в этом квадрате?
Ответ: 8640.

11.3. Клетки квадрата 80×80 покрашены в чёрный и белый цвет так, что в любом прямоугольнике 1×2 есть хотя бы одна чёрная клетка, и в любом прямоугольнике 1×6 найдутся две чёрные клетки, стоящие рядом. Какое наименьшее количество чёрных клеток может быть в этом квадрате?
Ответ: 3840.

11.4. Клетки квадрата 140×140 покрашены в чёрный и белый цвет так, что в любом прямоугольнике 1×2 есть хотя бы одна чёрная клетка, и в любом прямоугольнике 1×6 найдутся две чёрные клетки, стоящие рядом. Какое наименьшее количество чёрных клеток может быть в этом квадрате?
Ответ: 11760.

12.1. Лёша выложил из палочек целочисленной длины квадрат 38×38, разбитый на клеточки 1×1. Палочки не пересекаются во внутренних точках. Какое наименьшее количество палочек единичной длины могло быть использовано?
Ответ: 74.
Решение. Раскрасим клетки квадрата в черный и белый цвет в шахматном порядке. Посмотрим на черные клетки, прилегающие к границе квадрата, их 74. Очевидно, что такая клетка не может быть сложена из палочек длины больше 1. Значит, у каждой черной клетки на границе есть хотя бы одна единичная палочка. Черные клетки не имеют общих границ, поэтому все эти палочки различны. Значит, всего единичных палочек хотя бы 74. Пример для квадрата 6×6 изображен ниже, для нашего квадрата пример строится аналогично.



12.2. Лёша выложил из палочек целочисленной длины квадрат 26×26, разбитый на клеточки 1×1. Палочки не пересекаются во внутренних точках. Какое наименьшее количество палочек единичной длины могло быть использовано?

Ответ: 50.

12.3. Лёша выложил из палочек целочисленной длины квадрат 30×30, разбитый на клеточки 1×1. Палочки не пересекаются во внутренних точках. Какое наименьшее количество палочек единичной длины могло быть использовано?
Ответ: 58.

12.4. Лёша выложил из палочек целочисленной длины квадрат 34×34, разбитый на клеточки 1×1. Палочки не пересекаются во внутренних точках. Какое наименьшее количество палочек единичной длины могло быть использовано?
Ответ: 66.