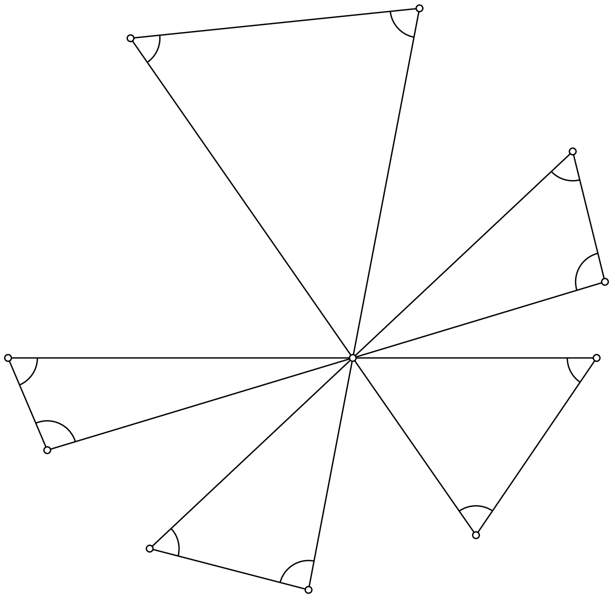
Дистанционный отбор, ответы и решения

Задача 1.1. На рисунке пять отрезков пересекаются в одной точке. Выразите в градусах сумму десяти отмеченных углов.

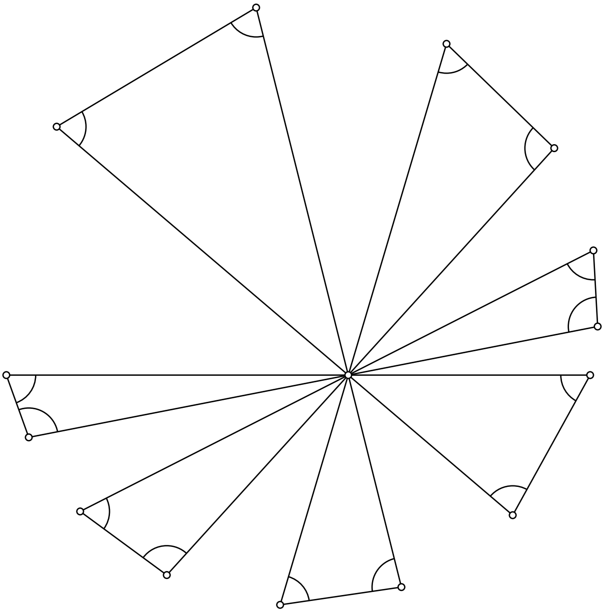


Ответ: 720.

Решение. Рассмотрим сумму всех углов пяти изображённых на рисунке треугольников. С одной стороны, эта сумма равна $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$. С другой стороны, эта сумма распадается на две: сумма X десяти интересующих нас углов из условия и сумма Y пяти углов при общей вершине. Имеем $X + Y = 900^\circ$.

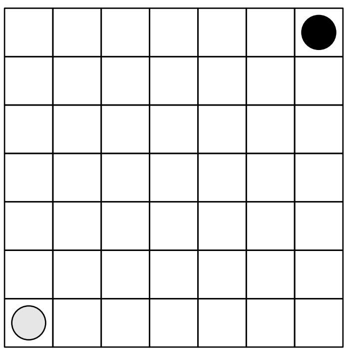
Вычислим Y. Заметим, что все десять углов, примыкающих к общей вершине пяти треугольников, можно разбить на пары вертикальных, и в сумме Y участвует ровно один угол из каждой пары. Раз сумма всех десяти углов равна 360°, то $Y = 360^\circ/2 = 180^\circ$. Находим $X = 900^\circ - 180^\circ = 720^\circ$. □

Задача 1.2. На рисунке семь отрезков пересекаются в одной точке. Выразите в градусах сумму четырнадцати отмеченных углов.



Ответ: 1080.

Задача 2.1. На клетчатой доске, изображённой на рисунке, в противоположных углах стоят две фишки: чёрная и белая. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Петя ходит белой фишкой, а Вася — чёрной. Каждый игрок за ход обязан переместить свою фишку на любую соседнюю по стороне или диагонали клетку. Петя ходит первым. Вася побеждает в тот момент, когда обе фишки оказались в одной клетке. Цель Пети — проиграть как можно позже, цель Васи — победить как можно раньше. После скольких ходов (суммарно Пети и Васи) закончится игра при наилучших действия обоих игроков?



Ответ: 12.

Решение. Для решения задачи достаточно предъявить две стратегии: как Пете продержаться хотя бы 11 ходов против любых действий Васи и как Васе догнать фишку Пети не позже чем на 12 ход.

Стратегия Пети. Пусть Петя ходит только по вертикали. Для того, чтобы фишки оказались в одной клетке, они в частности должны оказаться в одном столбце. Чтобы Васе добраться до первого столбца, внутри которого будет всё время находиться Петя, потребуется хотя бы 6 его ходов. А суммарно в игре произойдёт хотя бы 12 ходов.

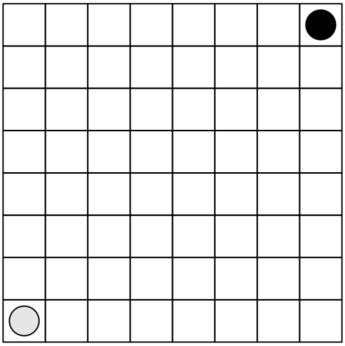
Стратегия Васи. Рассмотрим для начала одномерную игру: на полоске 1×7 в противоположных клетках стоят фишки в разных цветов, за ход можно переместить фишку в соседнюю клетку либо оставить на месте. Несложно понять, что в одномерной игре Вася может добиться того, чтобы фишки оказались в одной клетке не более чем за 6 ходов. Более того, после встречи фишек Вася может далее ходить так, чтобы после каждого его хода фишки оставались в одной клетке. Для всего вышеперечисленного Васе достаточно просто «жадно» передвигать чёрную фишку в сторону белой фишки (или не двигать, если фишки уже в одной клетке).

Вернёмся к исходной задаче. Давайте отдельно будем следить за x-координатами, и отдельно за y-координатами обеих фишек. Несложно видеть, что каждая позиция исходной игры на доске 7×7 будет соответствовать паре позиций в двух одномерных играх 1×7 (для x-координат и для y-координат), а возможные ходы исходной игры будут соответствовать парам ходов: один в одной игре 1×7, другой — в другой 1×7. Единственное исключение — в исходной игре нельзя не перемещать фишку, то есть нельзя одновременно не ходить в обеих одномерных играх.

Давайте за Васю играть по одномерной стратегии в каждой из полосок 1×7. Сразу скажем, что одномерные стратегии вынуждают нас не перемещать фишку в обеих полосках 1×7 одновременно только в том случае, когда чёрная фишка уже находится в одном столбце и в одной строке с белой фишкой — то есть в ситуации, когда уже наступила победа после хода Пети. Если этого не произошло, Вася не более чем за 6 ходов разместит чёрную фишку в одном столбце с белой фишкой и не более чем за 6 ходов — в одной строке. Отметим, что эти события могут произойти не одновременно; именно для этого в одномерной стратегии Вася не только добивается совпадения клеток фишек, но и поддерживает это свойство каждым своим ходом.

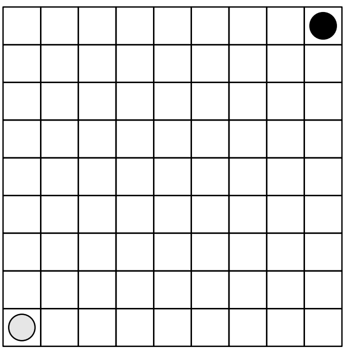
Для победы Васе потребуется сделать не более 6 своих ходов. Значит, в игре суммарно произойдёт не более 12 ходов. $\square$

Задача 2.2. На клетчатой доске, изображённой на рисунке, в противоположных углах стоят две фишки: чёрная и белая. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Петя ходит белой фишкой, а Вася — чёрной. Каждый игрок за ход обязан переместить свою фишку на любую соседнюю по стороне или диагонали клетку. Петя ходит первым. Вася побеждает в тот момент, когда обе фишки оказались в одной клетке. Цель Пети — проиграть как можно позже, цель Васи — победить как можно раньше. После скольких ходов (суммарно Пети и Васи) закончится игра при наилучших действия обоих игроков?



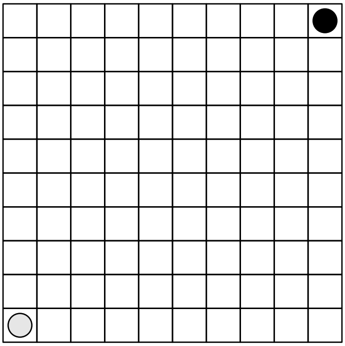
Ответ: 14.

Задача 2.3. На клетчатой доске, изображённой на рисунке, в противоположных углах стоят две фишки: чёрная и белая. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Петя ходит белой фишкой, а Вася — чёрной. Каждый игрок за ход обязан переместить свою фишку на любую соседнюю по стороне или диагонали клетку. Петя ходит первым. Вася побеждает в тот момент, когда обе фишки оказались в одной клетке. Цель Пети — проиграть как можно позже, цель Васи — победить как можно раньше. После скольких ходов (суммарно Пети и Васи) закончится игра при наилучших действия обоих игроков?



Ответ: 16.

Задача 2.4. На клетчатой доске, изображённой на рисунке, в противоположных углах стоят две фишки: чёрная и белая. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Петя ходит белой фишкой, а Вася — чёрной. Каждый игрок за ход обязан переместить свою фишку на любую соседнюю по стороне или диагонали клетку. Петя ходит первым. Вася побеждает в тот момент, когда обе фишки оказались в одной клетке. Цель Пети — проиграть как можно позже, цель Васи — победить как можно раньше. После скольких ходов (суммарно Пети и Васи) закончится игра при наилучших действия обоих игроков?



Ответ: 18.

Задача 3.1. Возрастающая последовательность натуральных чисел содержит в себе все числа, не являющиеся точными квадратами, кубами или пятыми степенями. Найдите 101-ый член этой последовательности.

Ответ: 114.

Решение. Рассмотрим числа от 1 до 100. Выпишем без повторений все квадраты, кубы и точные пятые степени в этом диапазоне:

$$\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\} \cup \{1,8,27,64\} \cup \{1,32\} =$$
$$= \{1,4,8,9,16,25,27,32,36,49,64,81,100\}$$

Получилось, что в множестве $\{1,2,\ldots,100\}$ всего 13 квадратов, кубов и пятых степеней.

Среди чисел $\{101,102,\ldots,114\}$ нет квадратов, кубов и пятых степеней. Получается, что в множестве $\{1,2,\ldots,114\}$ всё те же 13 чисел являются квадратами, кубами или пятыми степенями. А оставшиеся $114-13=101$ число — не являются. Следовательно, 101-ый член последовательности — это число 114. $\square$

Задача 3.2. Возрастающая последовательность натуральных чисел содержит в себе все числа, не являющиеся точными квадратами, кубами или пятыми степенями. Найдите 102-ой член этой последовательности.

Ответ: 115.

Задача 3.3. Возрастающая последовательность натуральных чисел содержит в себе все числа, не являющиеся точными квадратами, кубами или пятыми степенями. Найдите 103-ий член этой последовательности.

Ответ: 116.

Задача 3.4. Возрастающая последовательность натуральных чисел содержит в себе все числа, не являющиеся точными квадратами, кубами или пятыми степенями. Найдите 104-ый член этой последовательности.

Ответ: 117.

Задача 4.1. В коробке лежит 500 карт, пронумерованных натуральными числами от 100 до 599. Какое наименьшее число карт нужно вытащить из коробки, чтобы среди чисел, написанных на них, гарантированно нашлись три числа с одинаковыми суммами цифр?

Ответ: 45.

Решение. Наименьшая возможная сумма цифр на карте равна $1 + 0 + 0 = 1$, наибольшая — $5 + 9 + 9 = 23$, причём других карт с суммами цифр 1 и 23 нет. Легко видеть, что для каждого значения от 2 до 22 существуют хотя бы по две карты с этим значением.

Если среди вытащенных карт нет трёх с одинаковыми суммами цифр, то вытащено не более чем по две карты с суммами цифр $2, \ldots, 22$ и не более чем по одной карте с суммами 1 и 23 — всего не более $21 \cdot 2 + 1 + 1 = 44$ карт. Получается, что любые 45 карт удовлетворяют условию.

Вот пример 44 карт, в котором условие не выполнено: берём карту с суммой цифр 1, две карты с суммой цифр 2, две карты с суммой цифр 3, ..., две карты с суммой цифр 22, одну карту с суммой цифр 23. (Если нужен пример на меньшее число карт, можно взять произвольное подмножество примера на 44 карты.) $\square$

Задача 4.2. В коробке лежит 600 карт, пронумерованных натуральными числами от 100 до 699. Какое наименьшее число карт нужно вытащить из коробки, чтобы среди чисел, написанных на них, гарантированно нашлись три числа с одинаковыми суммами цифр?

Ответ: 47.

Задача 4.3. В коробке лежит 700 карт, пронумерованных натуральными числами от 100 до 799. Какое наименьшее число карт нужно вытащить из коробки, чтобы среди чисел, написанных на них, гарантированно нашлись три числа с одинаковыми суммами цифр?

Ответ: 49.

Задача 4.4. В коробке лежит 800 карт, пронумерованных натуральными числами от 100 до 899. Какое наименьшее число карт нужно вытащить из коробки, чтобы среди чисел, написанных на них, гарантированно нашлись три числа с одинаковыми суммами цифр?

Ответ: 51.

Задача 5.1. Найдите наибольшее натуральное число n, обладающее следующим свойством: для любых натуральных чисел $x < y < n$ остаток при делении числа $2025x$ на n меньше, чем остаток при делении числа $2025y$ на n.

Ответ: 2024.

Решение. Легко видеть, что $n = 2024$ подходит. Действительно: остатки чисел

$$2025 \cdot 1, 2025 \cdot 2, \ldots, 2025 \cdot 2023$$

при делении на 2024 соответственно равны $1, 2, \ldots, 2023$ — возрастающая последовательность.

Докажем, что все $n \geqslant 2025$ не подходят под условие. Случай $n = 2025$ тривиален, так как для $x < y < n$ все остатки равны 0. Если же $n > 2025$, разделим n с остатком на 2025: $n = 2025k + r$, причем $r < 2025, k \geqslant 1$. Заметим, что $2025k < n$, поэтому остаток при делении числа $2025k$ на n равен $2025k \geqslant 2025$. Также заметим, что

$$n = 2025k + r < 2025k + 2025 = 2025(k+1) < 2025(k+1) + r = n + 2025 < 2n,$$

поэтому остаток при делении числа $2025(k+1)$ на n равен $2025(k+1) - n = 2025 - r < 2025$. Вот и получается, что остаток при делении числа $2025k$ на n больше остатка при делении числа $2025(k+1)$ на n. Противоречие. $\square$

Задача 5.2. Найдите наибольшее натуральное число n, обладающее следующим свойством: для любых натуральных чисел $x < y < n$ остаток при делении числа $2026x$ на n меньше, чем остаток при делении числа $2026y$ на n.

Ответ: 2025.

Задача 5.3. Найдите наибольшее натуральное число n, обладающее следующим свойством: для любых натуральных чисел $x < y < n$ остаток при делении числа $2024x$ на n меньше, чем остаток при делении числа $2024y$ на n.

Ответ: 2023.

Задача 5.4. Найдите наибольшее натуральное число n, обладающее следующим свойством: для любых натуральных чисел $x < y < n$ остаток при делении числа $2023x$ на n меньше, чем остаток при делении числа $2023y$ на n.

Ответ: 2022.

Задача 6.1. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы произведение любых двух соседних чисел не превышало 109?

Ответ: 18.

Решение. Докажем, что в любой искомой расстановке не более 18 чисел. Назовём первые 9 по величине чисел *маленькими*, а остальные — *большими*. Заметим, что никакие два больших числа не могли стоять рядом, ведь их произведение не меньше $10 \times 11 = 110$. Легко понять, что если доля больших чисел среди всех чисел строго больше $1/2$, то какие-то два больших числа стоят рядом. Следовательно, количество больших чисел не больше 9, а всего чисел в круге не более 18.

Предъявим одну из возможных расстановок 18 чисел (ряд замыкается в круг):

$$10 - 9 - 11 - 8 - 12 - 7 - 13 - 6 - 14 - 5 - 15 - 4 - 16 - 3 - 17 - 2 - 18 - 1 - \ldots$$

$\square$

Задача 6.2. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы произведение любых двух соседних чисел не превышало 131?

Ответ: 20.

Задача 6.3. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы произведение любых двух соседних чисел не превышало 155?

Ответ: 22.

Задача 6.4. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы произведение любых двух соседних чисел не превышало 181?

Ответ: 24.

Задача 7.1. У торговца специями есть 27 гирек: три гирьки массой 1г, три гирьки массой 2г, …, три гирьки массой 9г. Торговец разложил все гирьки в 9 невесомых мешочков по 3 гирьки в каждый мешочек. Оказалось, что массы любых двух мешочков различны. Торговец выложил мешочки в ряд в порядке возрастания масс.

Найдите все значения, сколько граммов может составлять масса центрального (пятого в ряду) мешочка. В качестве ответа введите сумму всех найденных значений.

Ответ: 135.

Решение. Сумма масс всех мешочков равна $(1+2+\ldots+9)\cdot 3 = 135$ граммов. Нам это понадобится в дальнейшем.

Докажем, что масса центрального мешочка может принимать любые значения от 11 до 19 граммов и не может принимать никакие другие значения.

Пусть масса центрального мешочка хотя бы 20г. Тогда суммарная масса четырех меньших мешочков не меньше суммарной массы 12 наименьших по массе гирь, а суммарная масса четырех больших мешочков не меньше $21+22+23+24$ грамма. Значит, суммарная масса всех мешочков не меньше, чем $(1+2+3+4)\cdot 3+20+21+22+23+24 = 140$ граммов. Противоречие.

Пусть масса центрального мешочка не больше 10г. Тогда суммарная масса четырех больших мешочков не больше суммарной массы 12 наибольших по массе гирь, а суммарная масса четырех меньших мешочков не больше $9+8+7+6$ граммов. Значит, суммарная масса всех мешочков не больше, чем $(6+7+8+9)\cdot 3+10+9+8+7+6 = 130$. Противоречие.

Приведем пример для всех возможных значений масс центрального мешочка, от 11 до 19. Пронумеруем мешочки числами от 1 до 9. Пусть $1 \leqslant x \leqslant 9$. Положим в мешочек с номером n гири с массами $n, n, (5-n+x \pmod 9)$. Если третья гирька получается равной нулю, положим её равной 9 граммам. Тогда на первое место в мешочке мы положили по одной гире каждой массы, на второе место по одной гире каждой массы и на третье место по одной гире каждой массы. То есть, задействован весь набор гирек, указанный в условии и только он. Рассмотрим два мешочка с номерами n и $n+1$. Сумма масс в первом равна

$$n+n+(5-n+x \pmod 9)$$

грамм, а во втором равна

$$(n+1)+(n+1)+(4-n+x \pmod 9)$$

грамм. Разность масс $(n+1)$-го и n-го мешочков оценивается

$$(2n+2-2n)+(4-n+x \pmod 9)-(5-n+x \pmod 9) \geqslant 2-(1 \pmod 9) = 1,$$

то есть массы всех мешочков различны и упорядочены по возрастанию, значит, центральный мешочек имеет номер 5. Его масса равна $5 + 5 + (x \pmod 9) = 10 + x$, что при данных значениях x принимает все возможные значения от 11 до 19. $\square$

Задача 8.1. Обозначим через a_n количество способов раскрасить все клетки доски $2 \times n$ в чёрный и белый цвета так, чтобы у каждой клетки среди соседних с ней по стороне клеток оказалось нечётное число чёрных. Вычислите сумму

$$a_{100} + a_{101} + a_{102} + \ldots + a_{110}.$$

Ответ: 23.

Решение. Ориентируем доску горизонтально: две строки и n столбцов. Закодируем цвета: белый — 0, чёрный — 1.

Рассмотрим самую левую доминошку 1×2. Заметим, что по её раскраске однозначно восстанавливается раскраска следующей доминошки 1×2, затем следующей доминошки, затем следующей и т. д. Это легко понять, проанализировав условие для клеток последней раскрашенной доминошки: у каждой из них есть единственная нераскрашенная соседняя клетка, лежащая в следующей доминошке. Получаются следующие последовательности раскрасок доминошек, по одной для каждой четырех возможных раскрасок самой левой доминошки:

$$\begin{aligned}
&(0,0) \to (1,1) \to (0,0) \to (0,0) \to (1,1) \to (0,0) \to (0,0) \to \ldots \\
&(0,1) \to (0,1) \to (0,0) \to (1,0) \to (1,0) \to (0,0) \to (0,1) \to \ldots \\
&(1,0) \to (1,0) \to (0,0) \to (0,1) \to (0,1) \to (0,0) \to (1,0) \to \ldots \\
&(1,1) \to (0,0) \to (0,0) \to (1,1) \to (0,0) \to (0,0) \to (1,1) \to \ldots
\end{aligned}$$

У этих последовательностей период равен 6.

Добавим в доску воображаемую доминошку с номером $(n+1)$, обе клетки которой белые; клетки в доминошке с номером n по-прежнему удовлетворяют условию. Есть важное ограничение: доминошка с номером $(n+1)$ должна обладать кодом $(0,0)$; такие и только такие последовательности дают корректную раскраску всей доски.

Из таблички выше видно, что для $n \equiv 2 \pmod 3$ любая раскраска самой первой доминошки порождает корректную раскраску всей доски; а вот для $n \equiv 0, 1 \pmod 3$ существует единственная раскраска. Получается, что $a_{3k-2} = 1, a_{3k-1} = 4, a_{3k} = 1$ при всех натуральных k.

Остаётся вычислить сумму

$$a_{100} + \ldots + a_{110} = 1 + 4 + (1 + 1 + 4) + (1 + 1 + 4) + (1 + 1 + 4) = 23.$$

$\square$

Задача 8.2. Обозначим через a_n количество способов раскрасить все клетки доски $2 \times n$ в чёрный и белый цвета так, чтобы у каждой клетки среди соседних с ней по стороне клеток оказалось нечётное число чёрных. Вычислите сумму

$$a_{90} + a_{91} + a_{92} + \ldots + a_{110}.$$

Ответ: 42.

Задача 8.3. Обозначим через a_n количество способов раскрасить все клетки доски $2 \times n$ в чёрный и белый цвета так, чтобы у каждой клетки среди соседних с ней по стороне клеток оказалось нечётное число чёрных. Вычислите сумму

$$a_{90} + a_{91} + a_{92} + \ldots + a_{99}.$$

Ответ: 19.

Задача 8.4. Обозначим через a_n количество способов раскрасить все клетки доски $2 \times n$ в чёрный и белый цвета так, чтобы у каждой клетки среди соседних с ней по стороне клеток оказалось нечётное число чёрных. Вычислите сумму

$$a_{91} + a_{92} + a_{93} + \ldots + a_{100}.$$

Ответ: 19.

Задача 9.1. Нектар «Яблочный» содержит 50% яблочного сока, 27% апельсинового сока и 23% вишнёвого сока. Нектар «Мультифрукт» содержит 20% яблочного сока, 34% апельсинового сока и 46% вишнёвого сока. Вова взял m литровых пакетов первого нектара и n литровых пакетов второго нектара, всё смешал и подсчитал, что в получившейся смеси меньше 41% яблочного сока. Найдите наименьшую возможную концентрацию вишнёвого сока в смеси, если $m + n < 25$. (Здесь m и n — целые неотрицательные числа.)

Ответ: 30.

Решение. Запишем условие, гласящее, что концентрация яблочного сока в получившейся смеси меньше 41%, и преобразуем получившееся неравенство:

$$\frac{0.5m + 0.2n}{m+n} < 0.41;$$
$$0.5m + 0.2n < 0.41m + 0.41n;$$
$$0.09m < 0.21n;$$
$$m \cdot 3/7 < n.$$

Из условия получаем

$$24 \geqslant m + n > m + m \cdot 3/7 = m \cdot 10/7.$$

Значит, $m < 24 \cdot 7/10 = 16.8$, то есть $m \leqslant 16$.

Концентрация вишнёвого сока в смеси будет тем больше, чем больше значение дроби n/m. Найдём минимум этой дроби при всех $m \leqslant 16$ и $n > m \cdot 3/7$.

При $m = 16$, $n = 7 > 16 \cdot 3/7$ значение дроби n/m равно $7/16$.

Оценив дробь n/m, усилив неравенство $7n > 3m$ до $7n \geqslant 3m + 1$:

$$\frac{n}{m} = \frac{7n}{7m} \geqslant \frac{3m+1}{7m} = \frac{3}{7} + \frac{1}{7m} \geqslant \frac{3}{7} + \frac{1}{7 \cdot 16} = \frac{7}{16}.$$

При $m = 16$, $n = 7$ концентрация вишнёвого сока составляет

$$\frac{0.23 \cdot 16 + 0.46 \cdot 7}{16 + 7} = 30\%.$$

□

Задача 10.1. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CH. В треугольниках ACH и BCH проведены биссектрисы CK и CL соответственно. Оказалось, что точка L является серединой стороны AB. Найдите $2 \cdot CH - AK$, если известно, что длина отрезка KL равна 10.

Ответ: 20.

Решение. Раз CL — медиана в прямоугольном треугольнике ABC, то $CL = BL$ и тем самым $\angle LCB = \angle B$. Поскольку CL — биссектриса угла BCH, $\angle LCB = \angle LCH$. Тогда сумма углов треугольника BCH равна

$$180^\circ = \angle BHC + \angle BCL + \angle LCH + \angle B = 90^\circ + 3\angle B,$$

откуда $\angle B = 30^\circ$.

В прямоугольном треугольнике BCH с углом $\angle B = 30^\circ$ катет BH вдвое короче гипотенузы BC. Имеем $2CH = BC$.

Найдём величину угла $\angle BCK$, используя то, что CK — биссектриса угла ACH.

$$\angle BCK = \angle BCH + \angle HCK = 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot \angle HCA = 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 75^\circ.$$

Получается, что треугольник BCK — равнобедренный, ведь его углы равны 30°, 75°, 75°, и тогда $BC = BK$. Выразим интересующие нас отрезки через стороны треугольника ABC.

$$KL = AL - AK = \frac{AB}{2} - (AB - BK) = BC - \frac{AB}{2};$$
$$2CH - AK = BC - (AB - BK) = 2BC - AB.$$

Получаем, что $2CH - AK = 2BC - AB = 2 \cdot \left(BC - \frac{AB}{2}\right) = 2 \cdot 10 = 20.$ □

Задача 10.2. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CH. В треугольниках ACH и BCH проведены биссектрисы CK и CL соответственно. Оказалось, что точка L является серединой стороны AB. Найдите $2 \cdot CH - AK$, если известно, что длина отрезка KL равна 20.

Ответ: 40.

Задача 10.3. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CH. В треугольниках ACH и BCH проведены биссектрисы CK и CL соответственно. Оказалось, что точка L является серединой стороны AB. Найдите $2 \cdot CH - AK$, если известно, что длина отрезка KL равна 15.

Ответ: 30.

Задача 10.4. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CH. В треугольниках ACH и BCH проведены биссектрисы CK и CL соответственно. Оказалось, что точка L является серединой стороны AB. Найдите $2 \cdot CH - AK$, если известно, что длина отрезка KL равна 25.

Ответ: 50.

Задача 11.1. Назовем натуральное число *горным*, если в его десятичной записи нет цифры 0, ни одна цифра не использована дважды и каждая цифра, за исключением первой и последней, больше хотя бы одной из соседних с ней цифр. Сколько всего горных чисел?

Ответ: 9841.

Решение. Рассмотрим последовательность $a_1, \ldots, a_n$ цифр некоторого горного числа. Пусть a_k — наибольшая цифра. Заметим, что $a_k > a_{k-1} > a_{k-2} > \ldots > a_1$, так как иначе первое в этом ряду неравенство с неправильным знаком приведёт к противоречию с условием. Аналогично, $a_k > a_{k+1} > \ldots > a_n$. Верно и обратное: любое число из различных ненулевых цифр, в котором справедливы обе цепи неравенств — горное.

Рассмотрим раскраску элементов множества $\{1, 2, \ldots, 9\}$ в белый, синий и красный цвета, в которой не все элементы белые. Всего таких раскрасок $3^9 - 1$. Каждой такой раскраске можно сопоставить единственное горное число: достаточно выписать синие цифры в порядке возрастания, а затем красные в порядке убывания.

Заметим, что каждому горному числу $a_1, \ldots, a_n$ соответствует ровно две раскраски, его порождающие: $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}, \{a_k, \ldots, a_n\}$ и $\{a_1, \ldots, a_k\}, \{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ (выписаны множества элементов красного и синего цвета; один из цветов может оказаться пустым).

Получается, что раскрасок вдвое больше, чем горных чисел. Следовательно, количество горных чисел $(3^9 - 1)/2 = 9841$. $\square$

Задача 11.2. Назовем натуральное число *горным*, если в его десятичной записи нет цифр $0, 1$, ни одна цифра не использована дважды и каждая цифра, за исключением первой и последней, больше хотя бы одной из соседних с ней цифр. Сколько всего горных чисел?

Ответ: 3280.

Задача 11.3. Назовем натуральное число *горным*, если в его десятичной записи нет цифр $0, 1, 2$, ни одна цифра не использована дважды и каждая цифра, за исключением первой и последней, больше хотя бы одной из соседних с ней цифр. Сколько всего горных чисел?

Ответ: 1093.