

Теория и ключевые задачи группы 9, второе полугодие

Теория

Алгебра

1. Комплексные числа. Тригонометрическая запись числа. Формула Муавра. Корень из комплексного числа. [Листик 1](#), [листик 2](#).
2. Теоремы Кронекера и Дирихле. [Листик](#), [разбор](#).
3. Элементарные симметрические многочлены, определение. Основная теорема о симметрических многочленах, формулировка и доказательство. [Листик](#).
4. Линейные рекурренты, основные определения. Решение линейных рекуррент второго порядка. [Листик](#).

Геометрия

1. Направленные углы. Направления. Основные определения, базовые свойства, критерии вписанности четырёхугольника, биссектрисы. [Листик 1](#), [листик 2](#).
2. Точка Шалтая, определение и основные свойства. Точка Шалтая — центр поворотной гомотетии, переводящей одну высоту в другую. [Листик](#).
3. Точка Болтая, определение и основные свойства. Точка Болтая как проекция центра описанной окружности на симедиану. [Листик](#).
4. Комплексные числа в геометрии: умножение на комплексное число задаёт поворотную гомотетию на комплексной плоскости, произвольная поворотная гомотетия в комплексных координатах; критерии коллинеарности трёх точек и перпендикулярности двух прямых. [Листик](#).
5. Двойное отношение четвёрки точек на одной прямой и четвёрки прямых, проходящих через одну точку — определения. Сохранение двойных отношений при центральной проекции. [Листик](#), [разбор](#).
6. Если различные точки A, B и C лежат на одной прямой, то двойное отношение $(A, B; C, \cdot)$ однозначно задаёт четвёртую точку на этой прямой. Чему равны $(B, A; C, D)$, $(A, B; D, C)$ и $(A, C; B, D)$, если $(A, B; C, D) = \lambda$? [Листик](#), [разбор](#).
7. Двойное отношение четырёх точек на окружности, определение. При инверсии сохраняется двойное отношение четырёх точек, лежащих на обобщённой окружности. [Листик](#), [разбор](#).
8. Поляра, определение и основные свойства. Доказательство леммы об изогоналах при помощи полярного преобразования. [Листик](#), [разбор](#).

Комбинаторика

1. Счётные и континуальные множества. Счётность $\mathbb{Q}$. Равномощность $[0, 1]$, $(0, 1)$, $\mathbb{R}$, бесконечных последовательностей из 0 и 1. Неравномощность счётного и кон-

тинауального множеств. Теорема Кантора — Бернштейна (формулировка). [Листик](#).

2. ЧУМы, цепи, антицепи, определения. Теоремы Мирского и Дилуорса, формулировки и доказательства. [Листик](#).

Задачи

Алгебра¹

1. Вычислите суммы:
(а) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$
(б) $\cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \dots + \cos(n\varphi)$ и $\sin(\varphi) + \sin(2\varphi) + \dots + \sin(n\varphi)$
(в) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots$ [Листик](#).
2. Натуральные числа m и n таковы, что $x^{2m} + x^m + 1$ делится на $x^{2n} - x^n + 1$. Докажите, что $x^{2m} + x^m + 1$ делится на $x^{2n} + x^n + 1$. [Листик](#).
3. Множество из 100 подряд идущих натуральных чисел назовём *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Конечно ли число прекрасных множеств? [Листик](#).
4. Пусть x, y, z — положительные вещественные числа такие, что $x y z = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{yz + z} + \frac{1}{zx + x} + \frac{1}{xy + y} \geq \frac{3}{2}.$$

[Листик](#).

5. Для положительных чисел a, b и c , удовлетворяющих условию $a + b + c = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right).$$

[Листик](#).

6. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{c+a}{b+c}.$$

[Листик](#).

Геометрия

1. В углы треугольника ABC вписаны три окружности одинакового радиуса. Каждая из них касается двух сторон треугольника. Вершины треугольника UVW лежат на разных сторонах треугольника ABC , и каждое ребро UVW также касается одной из трех окружностей.

¹По ссылкам в названиях разделов см. указания и решения.

- Аналогично, вершины треугольника PQR лежат на разных сторонах треугольника ABC , и каждое ребро PQR также касается одной из трёх окружностей. Докажите, что радиусы вписанных окружностей UVW и PQR равны. **Листик.**
- Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I . Точки O_1 и O_2 — центры окружностей (AID) и (CID) . Докажите, что центр окружности (O_1IO_2) лежит на биссектрисе угла B четырёхугольника $ABCD$. **Листик.**
 - На сторонах BA и AC треугольника ABC выбираются такие переменные точки D и E соответственно, что CD и BE пересекаются на окружности (ADE) . Докажите, что центры всех таких окружностей (ADE) лежат на фиксированной прямой, не зависящей от выбора D и E . **Листик.**
 - Биссектриса внутреннего угла при вершине A треугольника ABC пересекает (ABC) в точке D , а биссектриса внешнего угла пересекает BC в точке E . Симедиана, поведённая из вершины A , пересекает (ABC) в точке L . Докажите, что D , E , L лежат на одной прямой. **Листик.**
 - Окружности ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_4 касаются друг друга внешним образом по циклу. Окружность ω касается их всех внешним образом в точках X_1 , X_2 , X_3 , X_4 соответственно. Докажите, что $X_1X_2X_3X_4$ образуют гармонический четырёхугольник. **Листик.**
 - (а) Вписанная окружность описанного четырёхугольника $ABCD$ касается есть сторон AB , BC , CD , DA в точках K , L , M , N соответственно. Прямые AB и CD пересекаются в точке P , прямые AD и BC — в точке Q , прямые KL и MN — в точке R , прямые KN и LM — в точке S . Докажите, что P , Q , R , S лежат на одной прямой.
 (б) Докажите, что в описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами.
 (в) Докажите, что во вписанно-описанном четырёхугольнике точка пересечения диагоналей лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей.
 (г) Докажите, что все четырёхугольники, одновременно вписанные в окружность Ω и описанные вокруг окружности ω , имеют общую точку пересечения диагоналей. **Листик.**

Комбинаторика

- На клетках $c3$ и $h7$ стоят белая и черная ладьи. Двое по очереди, начиная с белых, двигают ладью своего цвета на любое число клеток по горизонтали или вертикали. Запрещается ходить ладьей под бой другой ладьи и останавливаться на клетке, на которой эта ладья уже была ранее. Тот, кто не может сделать ход, проиграл. Кто выигрывает при правильной игре? **Листик.**
- Бизнесмен заключил с банкиром сделку: каждый день он кладёт в банк одну монету и в обмен получает любой набор монет по своему выбору, но все эти монеты меньшего достоинства (видов монет — конечное число). Менять (или получать) деньги в другом месте бизнесмен не может. Когда монет больше не останется,

бизнесмен проигрывает. Докажите, что рано или поздно банкир выиграет, каков бы ни был начальный набор монет у бизнесмена. [Листик](#).

3. Докажите, что количество разбиений числа n в сумму различных слагаемых равно количеству разбиений числа n в сумму нечётных слагаемых. [Листик](#).
4. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC , перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков? [Листик](#).
5. Для данных натуральных r и s покажите, что любая последовательность различных чисел длины $rs + 1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r + 1$ или монотонно убывающую длины $s + 1$. [Листик](#).
6. Рассмотрим все прямоугольники с целыми сторонами, не превосходящими 1000. Какое максимальное количество таких прямоугольников можно выделить, чтобы ни один из них нельзя было поместить в другой так, чтобы их стороны были попарно параллельны? [Листик](#).
7. Рёбра полного ориентированного графа на $n^2 + 1$ вершине раскрашены в два цвета, причём одноцветных циклов нет. Докажите, что в графе существует одноцветный путь длины n . [Листик](#).